

Ole Klungøy

Sesongjustering av tidsserier
Spektralanalyse og filtrering

Innhold

1. Innledning	2
2. Enkel analyse i tidsplanet	3
2.1. Tidsseriemodell.....	3
2.2. Filtrering i tidsplanet.....	4
3. Analyse i frekvensplanet	9
3.1. Frekvens.....	9
3.2. Diskretisering (sampling).....	10
3.3. Spektraltetthet	13
3.3.1. Spektralrepresentasjon av autokovariansfunksjonen (ACVF).....	13
3.4. Filtrering i frekvensplanet.....	19
3.4.1. Filtrene fra kapittel 2.....	19
3.4.2. Differanseoperatoren	22
3.4.3. Lavpassfiltrering	23
3.4.4. Symmetriske kontra usymmetriske filtre	26
4. Filtrering i X-12-ARIMA	29
4.1. Filtrering av den irregulære komponenten.....	29
4.2. Variansreduksjon.....	30
4.3. Glatthet.....	31
4.4. X-11 basis algoritme slik den brukes i X-12-ARIMA	34
4.4.1. Initiell estimering av trendfunksjon.....	34
4.4.2. Initiell estimering av sesong-irregulær komponent	35
4.4.3. Initiell estimering av sesongkomponent	35
4.4.4. Initiell estimering av sesongjustert serie.....	36
4.4.5. Trendestimering ved Hendersonfiltre	36
4.4.6. Estimering av sesong-irregulær komponent	37
4.4.7. Estimering av sesongkomponent	37
4.4.8. Estimering av sesongjustert serie.....	37
5. Spektralestimering	38
5.1. Konsistente spektralestimatorer	40
6. Referanser	45
De sist utgitte publikasjonene i serien Notater	46

1. Innledning

Dette notatet er skrevet med utgangspunkt i pensum for et kurs til Byråskolen høsten 2000. Målet var å forklare grunnleggende prinsipper i sesongjustering. Flere seksjoner i SSB sesongjusterer tidsseriene sine, og er brukere av sesongjusteringsprogrammet X-12-ARIMA, som er utviklet i statistikkbyrået i USA, U.S. Bureau of the Census. Leser en referansemanualen der brukes modeller fra teorien for tidsserier, og mange fundamentale resultater antas kjent. Selv for enkel bruk kan det være vanskelig å orientere seg i manual og program uten en viss teoretisk bakgrunn. Dette er motivasjonen for innholdet i dette notatet. Jeg prøver å balansere på kanten mellom teori og anvendelse. Spektralanalyse er en selvstendig del av teorien og har sitt utspring i de tradisjonelle ingeniørfagene hvor de har vektlagt tidsseriens bølgeegenskaper, mens den matematiske statistikken har analysert tidsserier vha autokovarians (autokorrelasjon) langs tidsaksen. Dette er alternative måter å se tidsserien på, og de utfyller hverandre slik at de i hver sine tilfeller kan være best egnet, avhengig av anvendelsen.

Jeg forutsetter at leseren kjenner noe til de klassiske ARMA(p,q) modellene for tidsserier, f.eks. som det er presentert i [9]. Ellers trengs lite forkunnskaper, men bakgrunn i matematikk tilsvarende sosialøkonomstudiet er en fordel. Komplekse tall, rekker og trigonometriske funksjoner behandles og er byggestener i spektralanalysen. Noen fundamentale begreper og resultater fra teorien er tatt med, men ingen bevis og med liten vekt på utledninger. Det har hele tiden vært meningen å knytte og begrense teorien til det man får bruk for i X-12-ARIMA. Selv om det var ment for undervisning i utgangspunktet har innholdet blitt utvidet noe for kompletthetens skyld. Til kurset i Byråskolen, vil dette notatet være ment å dekke andre halvdel av pensumet (ca. 20 timer, fordelt på fire dager), der første halvdel dekker de klassiske ARMA(p,q) modellene samt bruk av X-12-ARIMA uten vekt på spektralanalyse. I nåværende form vil mengden stoff passe hvis man sløyfer de mest tekniske avsnittene som deler av avsnitt 3.3 og kapittel 5.

Spektralanalyse går ut på å analysere tidsserien i frekvensplanet. Frekvensbegrepet egner seg som beskrivelse av et fenomen som gjentar seg med jevne mellomrom, og for oss er det betydningen fra fysikken som er viktig, nemlig antall ganger et periodisk forløp gjentar seg pr. tidsenhet. Hvis dette antallet er høyt er frekvensen høy, og en tidsserie med høyfrekvente komponenter beveger seg urolig (forandrer seg fort) i tidsplanet. Ved å finne ut hvor mye en tidsserie inneholder av et helt spekter av forskjellige frekvenser, beskrives tidsserien like godt som vha autokovariansfunksjonen. Sesongjustering av en tidsserie kan betraktes som å fjerne en, eller flere frekvenskomponenter fra tidsseriens frekvensspekter. Dette kan oppnås ved glidende veiede gjennomsnitt, såkalte filtre. For å analysere og sammenligne filtre er spektralanalyse spesielt godt egnet, og vi skal se nærmere på dette.

Først skal vi i kapittel 2 presentere noen filtre som utfører sesongjustering i den forenklete situasjonen der en ikke har støy (tilfeldige uregelmessigheter i tidsserien) og beskrive hvordan en kan finne koeffisientene. Så skal vi definere spektralrepresentasjonen av en stasjonær tidsserie i kapittel 3 og analysere de filtrene vi brukte i kapittel 2 i frekvensplanet. I kapittel 4 ser vi på hvilke filtre som brukes i X-12-ARIMA og hvilke egenskaper de har. Til slutt skal vi i kapittel 5 se på hvordan man estimerer frekvensspekteret til en tidsserie.

2. Enkel analyse i tidsplanet

2.1. Tidsseriemodell

Vi nøyer oss her med å betrakte tidsserier i diskret tid $\{t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, f.eks. tidsserier over måneds- eller kvartalstall, og tar utgangspunkt i flg. klassiske dekomposisjonsmodell:

$$(2.1) \quad O_t = T_t + S_t + I_t,$$

der O_t (observasjonene) kan dekomponeres i T_t som er en sakte varierende deterministisk trend-funksjon, f.eks. et polynom, S_t som er en periodisk funksjon med periode d slik at den oppfyller

$$S_t = S_{t+d}, \text{ og } \sum_{i=t}^{t+d} S_i = 0 \text{ og } I_t \text{ som er den irregulære komponenten som kan modelleres som en}$$

stasjonær ARMA(p,q) modell. Denne notasjonen er valgt som i X-12-ARIMA, ellers ville de deterministiske funksjonene gjerne hatt små bokstaver. Ved å betrakte tidsserien grafisk kan man få et inntrykk av om en slik modell kan være en brukbar beskrivelse, og i mange økonomiske tidsserier er dette tilfelle. Målet er selvfølgelig å estimere de forskjellige delene for så å gi en god sannsynlighetsteoretisk modell for observasjonene, til bruk for f.eks. fremskrivning.

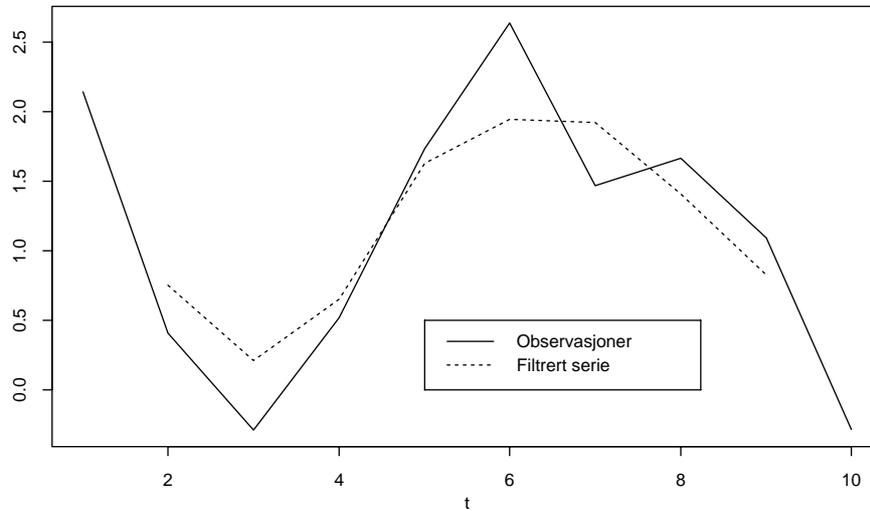
Sesongjustering kan betraktes som filtrering som igjen er en god innfallspport til spektralanalyse generelt så det er en naturlig forbindelse mellom sesongjustering og spektralanalyse. Filtrering er en lineær operator utført på observasjonene. Vi betegner filteret til serien $\{O_t\}$ med $M(O_t)$ (M er forkortelse for "moving average") og denne er gitt ved:

$$(2.2) \quad M(O_t) = \sum_{j=-q}^q a_j O_{t-j},$$

Der koeffisientene $\{a_j\}$ er selve filteret med lengde (antall koeffisienter) $2q + 1$. Vi betrakter bare de tilfellene der koeffisientene er uavhengige av tiden (tidsinvariant) og antallet er oddetall. Hvis antallet ikke er oddetall blir filteret ikke sentrert på en bestemt t , så da vil vi utvide med 0-er. Egentlig kan filteret defineres med $q = \infty$, og koeffisientene lik 0 utenfor en viss grense.

Et enkelt eksempel på et filter, er et glidende gjennomsnitt med lik vekt til alle observasjonene $a_j = \frac{1}{2q+1}$. Hvis man har f.eks. 10 observasjoner O_1, O_2, \dots, O_{10} og $q = 1$, har vi et filter med 3 koeffisienter, $M = [a_{-1}, a_0, a_1] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Den første filtrerte verdien fås ved å ta gjennomsnittet av de 3 første observasjonene, altså $M(O_2) = \frac{1}{3}O_3 + \frac{1}{3}O_2 + \frac{1}{3}O_1$, mrk. at den filtrerte serien ikke er definert for $t=1$ og $t=10$. Tilsvarende blir den andre filtrerte verdien lik $M(O_3) = \frac{1}{3}O_4 + \frac{1}{3}O_3 + \frac{1}{3}O_2$ osv. slik at vi får den filtrerte serien $M(O_2), M(O_3), \dots, M(O_9)$, se figuren nedenfor.

Vi ser at den filtrerte serien har noenlunde samme form som den opprinnelige, bare litt glattere. Dette tilsvarer i frekvensplanet at den tar vekk de høyeste frekvenskomponentene. Vi skal se at spektralanalysen er et godt verktøy for å konstruere filtre med bestemte egenskaper, men først skal vi konstruere noen filtre vha analyse i tidsplanet.



Figur 1: Observasjoner og filtrerte verdier med glidende gjennomsnitt med lengde 3

2.2. Filtrering i tidsplanet

Med utgangspunkt i modellen fra (2.1) kan sesongjustering betraktes som det å estimere sesongkomponentene S_t som kan være interessant i seg selv, eller eventuelt fjerne dem fra observasjonene for å estimere trendfunksjonen. Først presenterer vi et nyttig resultat som kan brukes for å konstruere et filter med bestemte egenskaper uten bruk av spektralanalyse. Vi antar vi har en tidsserie som kan beskrives ved (2.1). Videre har vi en trendfunksjon som er et polynom av orden k ,

$T_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k$, og et lineært filter $\{a_j\}$, gitt ved (2.2). Da er flg. betingelser nødvendige og tilstrekkelige for at filteret, uten å forvrengte, skal slippe igjennom alle polynomer av orden $\leq k$:

$$(2.3) \quad \sum_j a_j = 1, \quad \text{og} \\ \sum_j j^r a_j = 0, \quad \text{for } r = 1, \dots, k$$

For å se at dette stemmer skriver vi trendfunksjonen på formen $T_t = \sum_{i=0}^k c_i t^i$. Det er nok å se at når den filtrerte trendfunksjonen er lik den opprinnelige trendfunksjonen, altså at $T_t = \sum_j a_j T_{t-j}$, er dette ekvivalent med (2.3). Vi setter direkte inn, og ved å bytte summasjonsrekkefølge får vi:

$$\begin{aligned} \sum_j a_j T_{t-j} &= \sum_j a_j \left(\sum_{i=0}^k c_i (t-j)^i \right) = \sum_j a_j \sum_{i=0}^k c_i \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} (-1)^l t^{i-l} j^l \\ &= \sum_{i=0}^k c_i t^i \left(\sum_{l=0}^i \binom{i}{l} (-1)^l t^{-l} \sum_j a_j j^l \right) = \sum_{i=0}^k c_i t^i \left(\sum_j a_j + i(-1)^1 t^{-1} \sum_j a_j j + \dots + (-1)^i t^{-i} \sum_j a_j j^i \right) \end{aligned}$$

For at dette uttrykket skal være lik $\sum_{i=0}^k c_i t^i$ for alle t , må hvert ledd være likt. Altså må den siste parantesen være lik 1 og dette er ekvivalent med (2.3).

Vi skal nå prøve dette på noen konstruerte eksempler. Den gjennomgående tidsserien er kvartalsvis (slik som mange er i SSB) og uten støy, noe som ikke er realistisk. Vi har altså observasjoner som er innhentet med 3 måneders mellomrom, og serien har 48 observasjoner totalt, altså 12 år.

Eksempel 2.1:

Vi tenker oss først at tidsserien består kun av en lineær trendfunksjon, $T_t = c_0 + c_1 t$, med

$c_0 = 300$, $c_1 = -\frac{3}{2}$ og en sesongfunksjon med periode lik 1 år, altså at $S_t = S_{t+4}$ og $\sum_{i=t}^{t+4} S_i = 0$ med

$(S_1, S_2, S_3, S_4) = (-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}, -2)$, se figuren nedenfor. Vi ønsker å konstruere et symmetrisk (letttest

siden det blir færre koeffisienter å bestemme) filter som skal kunne slippe gjennom en trendfunksjonen, men fjerne sesongfunksjonen, altså en enkel sesongjustering. At lengden på filteret må være større enn 1 er opplagt (for da sier (2.3) at denne koeffisienten må være lik 1 og dermed er filteret uten effekt). Hvis vi prøver med lengde 2 (og utvider med en 0 for å få oddetall) ser vi også fort at det ikke går, siden symmetri og at koeffisientene skal summeres til 1 gir at de må begge være lik $\frac{1}{2}$.

Men da kan de ikke oppfylle (2.3) for noen j . (Her kan det heller ikke konstrueres et usymmetrisk filter som gjør jobben.) Med lengde 3 og kan vi f.eks. betegne filteret med $[a, b, a]$. Da gir (2.3) at

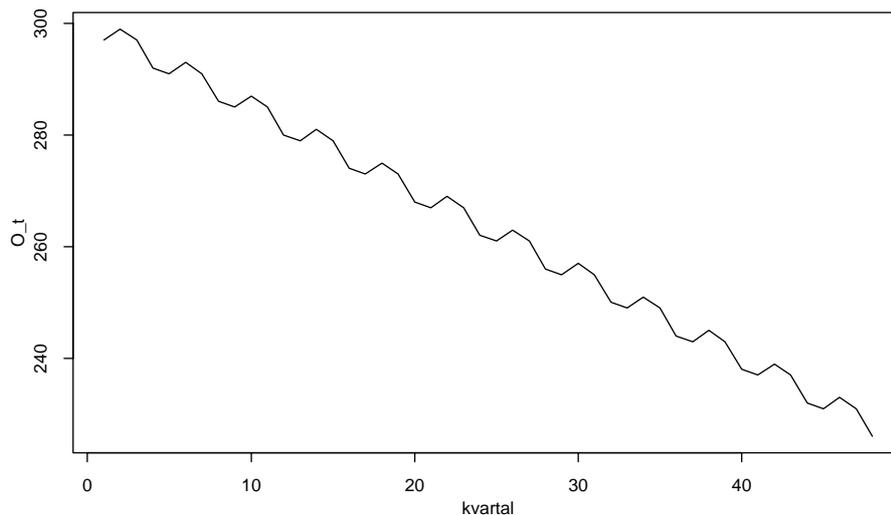
$2a + b = 1$. For å finne en ligning til og finne b , kan vi bruke at filtreringen kan skrives

$M(O_t) = \sum_j a_j O_{t-j} = \sum_j a_j T_{t-j} + \sum_j a_j S_{t-j} + \sum_j a_j I_{t-j}$, slik at filteret virker på hver del i modellen

for seg. Vi ønsker at den filtrerte sesongfunksjonen skal være 0 slik at dette gir for $t=2$:

$aS_3 + bS_2 + aS_1 = 0$. I tillegg krever vi at faktorene foran hver sesongkomponent (her lik

koeffisientene selv) skal være like. Vi skal se nedenfor hvorfor. Dette kravet medfører automatisk at man kan sette utenfor faktoren og siden vi vet fra før at $S_1 + S_2 + S_3 \neq 0$ blir den filtrerte sesongfunksjonen 0 bare hvis $a = b = 0$ som er i motsetning til (2.3).



Figur 2: Lineært avtagende trend og 4 kvartalers sesong

Dermed er ikke lengde 3 nok heller. Hvis vi prøver med lengde 4 (og utvidet med en 0) får vi også at $a = b$ (pga. sesong-faktorene må være like) og dermed at $a = \frac{1}{4}$ (fra (2.3)), men innsatt i (2.3) igjen får vi en motsigelse. Med lengde 5 har vi filteret $[a, b, c, b, a]$. For $t = 3$ får vi flg. ligning fra den filtrerte sesongfunksjonen:

$$aS_1 + bS_4 + cS_3 + bS_2 + aS_1 = 2aS_1 + bS_2 + cS_3 + bS_4 = 0$$

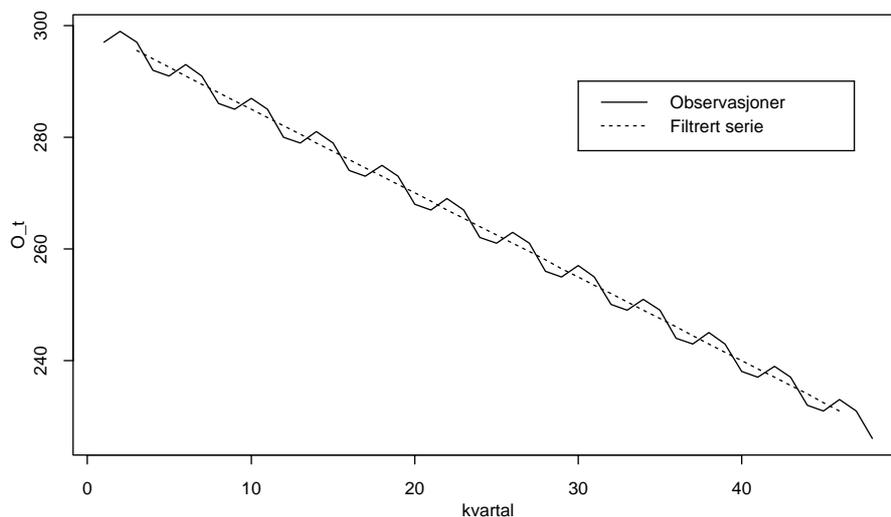
Med kravet om faktorenes likhet får vi dermed ligningene: $2a = b$, og $b = c$. Første krav i (2.3) gir oss i tillegg at $2a + 2b + c = 1$. Dermed har vi tre ligninger og tre ukjente som gir: $b = c = \frac{1}{4}$ og $a = \frac{1}{8}$, så vi får filteret

$$(2.4) \quad \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right]$$

En kort begrunnelse for at faktorene foran sesong-komponentene skal være like kan gis ved et eksempel hvor de ikke er like. Hvis man f.eks. tenker seg flg. rangering av faktorene: $2a > b > c > 0$ er det lett å finne sesong-komponenter som gjør at den filtrerte sesong-funksjonen $\neq 0$. Med $S_1, S_3 < 0$ og $S_2, S_4 > 0$ (husk at $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$) får vi at

$$2aS_1 + bS_2 + cS_3 + bS_4 > c(S_1 + S_3) + b(S_2 + S_4) > 0$$

som viser at sesongfunksjonen ikke kan bli 0 når faktorene ikke er like. Når man vet at like faktorer er tilstrekkelig betingelse er dette et rimelig krav, selv om det ikke er nødvendig i alle tilfeller. Filteret i (2.4) er prøvd på serien i figur 2 og resultatet vises nedenfor. Vi ser at filteret ikke er definert for de første og de to siste kvartalene.



Figur 3: Filtrering med filter av lengde 5

Hvis man er ute etter sesongkomponentene kan disse estimeres vha.

$$(2.5) \quad O_t - M(O_t) = T_t + S_t + I_t - (\sum_j a_j T_{t-j} + \sum_j a_j S_{t-j} + \sum_j a_j I_{t-j}) \approx S_t$$

siden støyen har forventning 0 (som gir at den filtrerte støyen blir liten når variansen er liten), den filtrerte trendfunksjonen er lik trendfunksjonen og den filtrerte sesongfunksjonen er 0. Hvis vi gjør dette her får vi $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4) = (-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}, -2)$ som stemmer. •

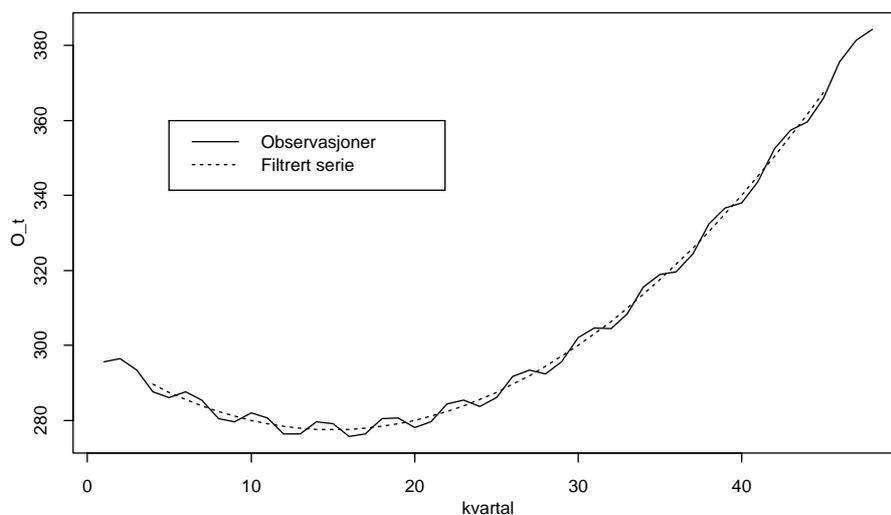
Eksempel 2.2:

La oss se hva som skjer når trendfunksjonen er et 2. gradspolynom, $T_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ med $(c_0, c_1, c_2) = (300, -3, \frac{1}{10})$ og sesongfunksjonen er som i eksempel 2.1. Det gir tilleggsbetingelsen $\sum_j a_j j^2 = 0$, og hvis vi prøver med filteret (2.4) får vi: $4a + b + b + 4a = 8a + 2b = 0$, noe som opplagt ikke er oppfylt for våre koeffisienter. Derfor prøver vi med et filter av lengde 7 i stedet, $[a, b, c, d, c, b, a]$. (2.3) gir ligningene: $2a + 2b + 2c + d = 1$ og $\sum_j a_j j^2 = 18a + 8b + 2c = 0$. Fra filtreringen av sesongfunksjonen får vi for $t = 4$: $(a + c)S_1 + 2bS_2 + (a + c)S_3 + dS_4 = 0$ som for å få like faktorer gir: $a + c = 2b$ og $2b = d$. Nå har vi 4 ligninger med 4 ukjente. På matriseform er dette:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 18 & 8 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrisen på venstre side er invertibel og løsning av ligningssystemet gir oss flg. filter:

$$(2.6) \quad \frac{1}{32} [-3, 4, 11, 8, 11, 4, -3]$$



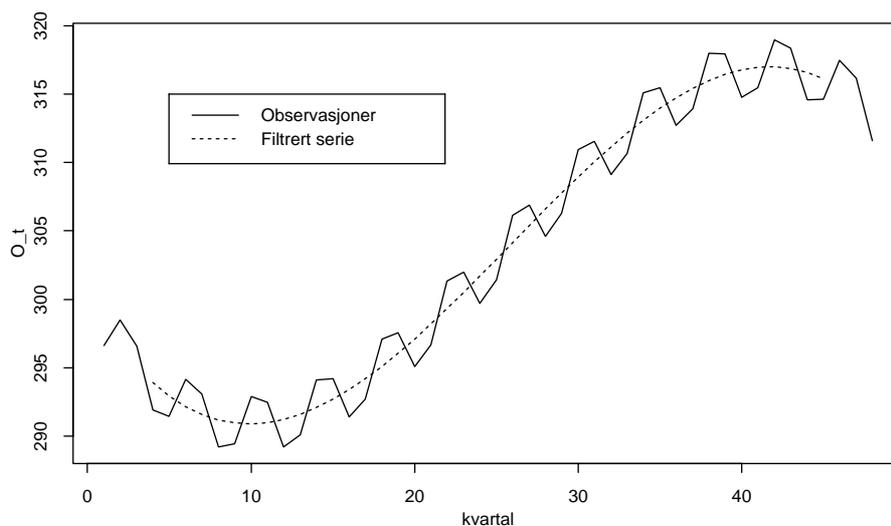
Figur 4: Filtrering med filter av lengde 7

Figuren ovenfor viser observasjonene og den filtrerte serien i dette tilfellet.

Legg igjen merke til at filteret her ikke er definert for de 3 første og de 3 siste kvartalene. Estimering av sesong-komponentene som i (2.5) gir $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4) = (-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}, -2)$ som igjen er korrekt og viser at filtreringen har fungert. Det som også er viktig her er at dette filteret dermed også automatisk fungerer for en lineær trend. Hvis vi prøver med filteret fra forrige eksempel får vi $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4) = (-1.65, 1.85, 1.35, -2.15)$ som ikke er så langt unna det riktige (nesten ikke synlig forskjell på figuren), men som likevel viser at det ikke fungerer. •

Eksempel 2.3:

Nå prøver vi en trendfunksjon som er et 3. gradspolynom, $T_t = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ med $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (300, -2, \frac{1}{8}, -\frac{1}{620})$ og samme sesongkomponenter som tidligere. Her er det interessant å merke seg at (2.3) ikke gir noen tilleggsbetingelser, siden $\sum_j a_j j^3 = 0$ pga. symmetri i filteret. Dette betyr at filteret (2.6) også vil virke på polynomer av grad 3 (og av grad 1). Figuren nedenfor viser observasjoner med filtrert serie.



Figur 5: Filtrering av 3. grads-polynom med filter (2.6)

Filteret (2.6) fungerer altså for polynomer av 1., 2. og 3. grad (hvis vi hadde prøvd det på eksempel 2.1 ville vi fått nøyaktig samme resultat som med filter (2.4)). Riktig estimering av sesongkomponentene, $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4) = (-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}, -2)$ er igjen bekreftelse på at filteret fungerer. Med filter (2.4) får vi $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4) = (-1.38, 2.12, 1.62, -1.87)$ for det siste året, og varierende med tiden, som viser at det ikke fungerer. •

Et filter som har gode egenskaper og ble brukt i tidligere versjoner av X-12-ARIMA som også slipper gjennom 3. grads (samt 1. og 2. grads) -polynomer, er Spencer filteret med lengde 15. Det er gitt ved:

$$(2.7) \quad \frac{1}{320}[-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, 67, 46, 21, 3, -5, -6, -3]$$

Dette fremkommer ved sekvensiell bruk av 4 filtre (se [1] og [6]). Det gir nøyaktig samme filtrering som (2.6) i våre eksempler (bortsett fra at det ikke er definert for de 7 første og siste kvartalene), slik at man ikke ser forskjell på dette og filter (2.6) i tidsplanet. I frekvensplanet derimot fremkommer forskjellen, og vi skal komme tilbake til dette og se at Spencerfilteret har flere fordeler.

At filtre som slipper gjennom 1., 2. og 3. grads polynomer er av interesse er fordi disse polynomene er fleksible og glatte nok funksjoner til å representere de fleste forløp man forbinder med en trendfunksjon.

3. Analyse i frekvensplanet

3.1. Frekvens

I innledningen definerte vi frekvens som antall ganger et periodisk forløp gjentar seg pr. tidsenhet. Antall svingninger pr. tidsenhet er nettopp definisjonen på frekvens-enheten Hz som er den mest fysisk intuitive. Vekselspenningen i strømkretsen i husene våre har en frekvens på ca. 52 Hz, dvs. at den skifter polaritet 52 ganger pr. sekund. En tone på et instrument er et annet eksempel på et fenomen som kan beskrives med enheten Hz, lysere tone betyr høyere frekvens. Men frekvens kan like godt defineres i radianer pr. tidsenhet som er vinkelhastighet eller vinkelfrekvens. Dette er naturlig fordi sinus (cosinus) funksjonen er den matematiske byggestenen i alle periodiske funksjoner, og har vinkel (i radianer eller grader) som argument. Fourierteorien sier (se [2]) at alle periodiske forløp kan approksimeres vilkårlig bra ved en endelig sum av sinuser (og cosinuser). Eller man kan tenke på et periodisk forløp representert ved en sirkel, alle verdier funksjonen gjennomløper i løpet av en periode er representert som et punkt på sirkelen når vinkelen fra f.eks. vertikalretningen går fra 0 til 360 grader, som er det samme som fra 0 til 2π radianer. Vinkelfrekvensen til en klokke er

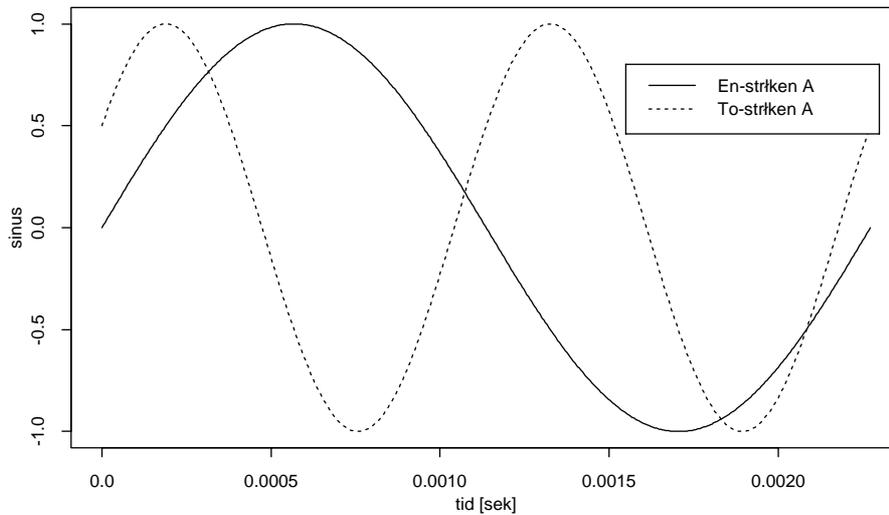
$$\frac{2\pi}{60} = 0.1047 \left[\frac{\text{radianer}}{\text{sekund}} \right].$$

Den matematiske formen på sinus-funksjonen vi skal bruke her er: $C \sin(\Omega t + \theta)$, der C er amplituden (utslaget på svingningene), Ω er vinkel-frekvensen i radianer/tidsenhet, t er tiden og θ er horisontal-forskyvningen fra origo i radianer (dermed kan en sum av en sinus og en cosinus også representeres ved denne formen).

Sammenhengen mellom frekvens i radianer / tidsenhet og Hz, er gitt ved formelen:

$$(3.1) \quad \Omega = 2\pi f,$$

der f er frekvens i Hz. Figuren nedenfor viser to sinuser som illustrer tonene en- og tostrøken A (f.eks. på et piano) med amplitude lik 1. Enstrøken A er 440 Hz som tilsvarer 2764.6 rad/sek. Tosrøken A har dobbelt så høy frekvens og beveger seg dermed to perioder på samme tid. Den tostrøken A-en er i tillegg forskjøvet med $\theta = \pi/6$ som gir en horisontal forskyvning mot venstre.



Figur 6: En-strøken A (440 Hz=2764.6 rad/sek) og to-strøken A med $\theta = \pi/6$

Vi ser den to-strøkene A-en har raskere svingninger (høyere frekvens).

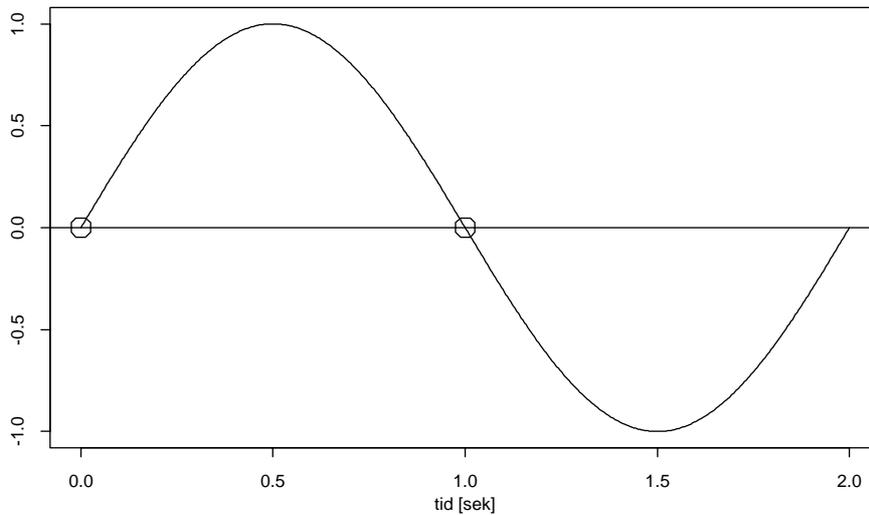
3.2. Diskretisering (sampling)

Vi betrakter tidsserier ved diskrete tidspunkter, dvs. at det er et visst tidsintervall mellom 2 observasjoner (konstant intervall hele tiden). Hvis prosessen man får observasjonene fra er diskret selv, mistes ikke informasjon, men hvis observasjonene kommer fra en kontinuerlig prosess, som f.eks. temperaturmålinger tatt med jevne mellomrom, mister man all informasjonen mellom observasjonstidspunktene.

Hvis prosessen er rent periodisk, kan man vise ved å betrakte Fouriertransformen av prosessen at ved å "sample" mer enn 2 ganger pr. periode i den høyeste frekvensen som prosessen inneholder mistes ingen informasjon, se f.eks. [2]. Dette forutsetter selvfølgelig at den høyeste frekvensen i prosessen er endelig og kjent, noe som kanskje ikke er realistisk, men man kan velge en så høy frekvens at den med god margin overstiger de som er interessante.

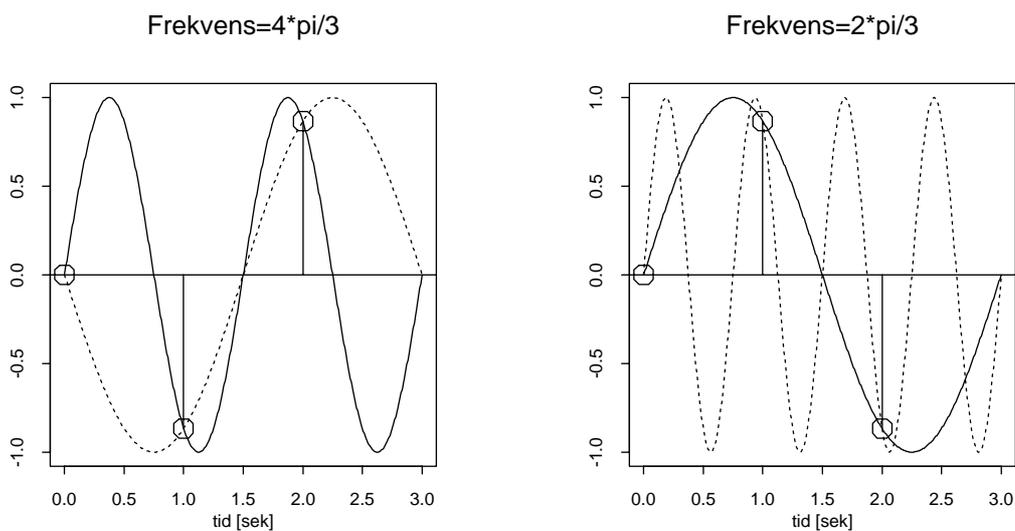
For å illustrere dette fenomenet, uten å utlede Fouriertransformen til prosessen tenker vi oss først det enkleste tilfellet hvor intervallet mellom observasjonene er 1 tidsenhet (samplingsintervallet), og frekvensen er lik $\pi \text{ rad/sek}$. Figuren nedenfor viser dette tilfellet. Her ser man at det ikke er mulig å skille sinusen fra funksjonen som er konstant lik 0.

To sampler pr. periode



Figur 7: 2 observasjoner pr. periode og 1 tidsenhet mellom observasjonene

Videre tenker vi oss 2 andre tilfeller, en litt høyere frekvens, $\frac{4}{3}\pi \text{ rad/sek}$ og en litt lavere frekvens, $\frac{2}{3}\pi \text{ rad/sek}$, men hele tiden med samplingsintervall lik 1 tidsenhet. Disse tilfellene er vist i figuren nedenfor. Som i figur 7 er det også her umulig å skille mellom den riktige frekvensen (som er inntegnet med heltrukket linje) og den såkalte "aliasen" som er stiplede linje. Vi ser at samplingsintervallene er de samme, og det figuren viser er at når frekvensen er større enn $\pi \text{ rad/sek}$ (som i figuren til venstre) har den en alias som er lavere enn seg selv (mindre enn $\pi \text{ rad/sek}$) i tillegg til de som er høyere enn seg selv. Mens når frekvensen er lavere enn $\pi \text{ rad/sek}$, som i figuren til høyre, har den ingen alias som er lavere enn seg selv, bare høyere slik som den stiplede linjen. Altså, med mer enn 2 observasjoner pr. periode fås ingen lavere aliaser.



Figur 8: Aliaser ved forskjellige frekvenser

Videre ser vi at alle frekvenser over $\pi \text{ rad/sek}$ vil ha en alias under $\pi \text{ rad/sek}$ som samples mer enn 2 ganger pr. periode (husk at samplingsintervallet er 1 tidsenhet). M.a.o. vil alle frekvenser være representert under $\pi \text{ rad/sek}$ og det er unødvendig å la frekvensskalaen gå lengre. Hvis man i tillegg vet at den høyeste frekvensen i prosessen (eller den høyeste interessante frekvensen) er under $\pi \text{ rad/sek}$ vil man unngå høyere aliaser også, man vil derfor sample mer enn 2 ganger pr. periode i alle prosessens frekvenser og den diskrete prosessen gir en entydig representasjon av den opprinnelige.

Hvis samplingsintervallet er forskjellig fra 1 tidsenhet, f.eks. 2 tidsenheter, blir det tilsvarende. På figuren til høyre i figur 8 ser vi at med 2 tidsenheter mellom observasjonene må frekvensen halveres for å unngå lavere aliaser og for å få mer enn 2 observasjoner pr. periode. Altså vil alle frekvenser over $\frac{\pi}{\Delta}$ (som i dette tilfelle $\frac{2}{3}\pi$ er) ha en alias under $\frac{\pi}{\Delta}$, når Δ er samplingsintervallet. Dermed er, i det generelle tilfellet, alle frekvenser representert under $\frac{\pi}{\Delta}$, og frekvensskalaen trenger ikke gå lengre. Ved å velge Δ slik at man sampler mer enn 2 ganger pr. periode i den høyeste frekvensen (og derfor mer enn 2 ganger i alle frekvensene), slipper man aliaser også over $\frac{\pi}{\Delta}$ og den diskrete prosessen er en entydig representasjon av den opprinnelige.

I praksis er det selvfølgelig også andre hensyn å ta, kanskje den høyeste frekvensen i prosessen er så høy at det er vanskelig å sample fort nok, og kanskje er dyrt med observasjoner, men da må man gjøre avveininger om hvor høye de interessante frekvensene er.

Med symboler kan samplingsprosessen fremstilles slik:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{tidsenhet}} \right] \times \Delta \left[\frac{\text{tid}}{\text{sampel}} \right] &= \omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{sampel}} \right] < \pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{sampel}} \right] \\ \Leftrightarrow \quad \Omega &< \frac{\pi}{\Delta} \end{aligned}$$

Der Ω er vinkelfrekvensen, Δ er samplingsintervallet og ω er den diskrete frekvensen. Overført til svingninger pr. tidsenhet kan dette også skrives:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} 2\pi f \times \Delta &= 2\pi f_{\omega} < \pi \\ \Leftrightarrow \quad f &< \frac{1}{2\Delta} \\ \Leftrightarrow \quad f_{\omega} &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der f har enhet $\left[\frac{\text{svingninger}}{\text{tidsenhet}} \right]$ og f_{ω} har enhet $\left[\frac{\text{svingninger}}{\text{sampel}} \right]$. Legg merke til at $f_{\omega} < \frac{1}{2}$ betyr nettopp at man må sample mer enn 2 ganger pr. svingning.

Aliasene til Ω som ligger over $\frac{\pi}{\Delta}$ kan uttrykkes som $\Omega + \frac{2\pi}{\Delta}, \Omega + 2\frac{2\pi}{\Delta}, \Omega + 3\frac{2\pi}{\Delta}, \dots$.

Hittil har vi ikke snakket om negative frekvenser (som er intuitivt litt vanskelig å forestille seg), men regneteknisk er det helt tilsvarende de positive frekvensene, og det er lurt å ha de med i utregningene, så intervallet i vinkelfrekvens til den samlede prosessen er $\left[-\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta} \right]$, eller i den diskrete frekvensen $[-\pi, \pi]$.

3.3. Spektraltetthet

Spektraltetthet er det sentrale begrepet i spektralanalyse. Spektraltettheten forholder seg til spektralfordelingen på en tilsvarende måte som sannsynlighetstettheten forholder seg til sannsynlighetsfordelingen. Man er nødt til å åpne for at både selve tidsserien $\{O_t\}$ og autokovariansfunksjonen $\gamma(h) = E(O_{t+h}\bar{O}_t) - E O_{t+h} E \bar{O}_t$ kan være komplekse tall (der \bar{O}_t betyr komplekskonjugert), men i praksis er de fleste tidsserier reelle (og har dermed selvfølgelig reell autokovariansfunksjon).

Først minner vi raskt om noen elementære fakta om komplekse tall og redegjør for notasjon vi vil bruke videre. Et komplekstall er i det komplekse planet gitt som en vektor på formen $x = a + ib$, der a er den reelle delen og b den komplekse (markeres med "i" som er $\sqrt{-1}$). En alternativ representasjon er den polare $x = \alpha e^{i\theta}$, der α er Modulus til x (lengden til vektoren som kan skrives $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$), θ er argumentet til x (vinkelen som vektoren danner med horisontal-aksen $\theta = \text{tg}^{-1}(\frac{b}{a})$) og $e^{i\theta}$ er den komplekse eksponentialfunksjonen.

Den komplekskonjugerte til x er gitt ved $\bar{x} = a - ib$. Dette gir at Modulus (kvadrert) til x kan skrives:

$$(3.4) \quad |x|^2 = x\bar{x} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - (i^2)b^2 = a^2 + b^2 = \alpha e^{i\theta} \alpha e^{-i\theta} = \alpha^2$$

En nyttig likhet er at den komplekse eksponentialfunksjonen også kan skrives:

$$(3.5) \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Dette kan ses direkte av Taylor-rekkene for de reelle funksjonene e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$.

3.3.1. Spektralrepresentasjon av autokovariansfunksjonen (ACVF)

En funksjon $\gamma(\cdot)$ definert på heltallene er en ACVF til en stasjonær tidsserie hvis og bare hvis det finnes en høyre-kontinuerlig, ikke-avtagende, begrenset funksjon F på $[-\pi, \pi]$, med $F(-\pi) = 0$ slik at

$$(3.6) \quad \gamma(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ihv} dF(v), \quad (e^{ihv} = \cos(hv) + i \sin(hv))$$

Da kalles funksjonen F for spektralfordelingsfunksjonen til tidsserien. Legg merke til frekvensintervallet, det er altså den diskrete frekvensen fra forrige kapittel (ω) vi snakker om her. Hvis det videre finnes en absolutt kontinuerlig ikke-negativ funksjon f slik at $F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(v)dv$ kalles denne for spektraltettheten og (3.6) kan skrives

$$(3.7) \quad \gamma(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ihv} f(v)dv, \quad h = 0, \pm 1, \dots$$

Eksistensen av f (at F ikke gjør noen sprang på $[-\pi, \pi]$) betyr at tidsserien ikke består av enkelte rene sinus (cosinus)-komponenter, men snarere uendelig mange.

Hvis ACVF-en er absolutt summerbar, altså $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty$ vil spektraltettheten kunne uttrykkes ved ACVF på flg. måte:

$$(3.8) \quad f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega} \gamma(n)$$

, den Fouriertransformerte ACVF. Summerbarheten garanterer konvergens av rekken. Man kan også bruke (3.8) til å sjekke om en absolutt summerbar funksjon $\gamma(h)$ er en ACVF ved å sjekke om $f(\omega)$ i (3.8) er ikkenegativ som er mye lettere enn å sjekke om en kompleks funksjon er ikkenegativt definit (og som er ekvivalent).

Eksempel 3.1:

For å undersøke om funksjonen $K(h) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } h = 0 \\ \rho & \text{hvis } h = \pm 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

er en ACVF er det nok å undersøke $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-in\omega} K(n) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho \cos \omega]$ som er ikke-negativ hvis og bare hvis $|\rho| \leq \frac{1}{2}$. Da er $K(h)$ en ACVF (for en MA(1) prosess). •

For oss er det viktig å beskrive spektraltettheten til en generell lineær prosess. Denne kan uttrykkes på formen:

$$(3.9) \quad O_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

med $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ (hvit støy), og $\{\psi_j\}$ koeffisienter som er absolutt summerbare:

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Legg merke til at $\{\psi_j\}$ kan betraktes som et filter. (ARMA(p,q) prosesser er inkludert i denne klassen). Da kan det vises at spektraltettheten til $\{O_t\}$ er gitt ved:

$$(3.10) \quad f_O(\omega) = |\Psi(e^{-i\omega})|^2 f_\varepsilon(\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

der $\Psi(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\omega}$ kalles transferfunksjonen til filteret og $|\Psi(e^{-i\omega})|^2$ effekt transferfunksjonen til filteret. Når inngangen til filteret er stasjonær (slik som hvit støy) og forventning lik 0 er også utgangen stasjonær og forventning lik 0, og med spektraltetthet som i (3.10).

Alle ARMA(p,q) prosesser har en spektraltetthet. (Stasjonariteten og positive semidefinitheten medfører summerbarhet og da må $f(\omega)$ i (3.8) være ikkenegativ og spektraltetthet.). Hvis $\{O_t\}$ er en ARMA(p,q) prosess gitt ved $\phi(B)O_t = \theta(B)\varepsilon_t$, der $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ har den spektraltetthet:

$$(3.11) \quad f_O(\omega) = \frac{\sigma^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Dette er et spesialtilfelle av (3.10). Generelt vil en funksjon $f(\omega)$ på $[-\pi, \pi]$ være en spektraltetthet til en reell stasjonær prosess hvis og bare hvis den er symmetrisk om 0, ikke-negativ og har endelig integral.

Eksempel 3.2: Spekteret til hvit støy.

ACVF til hvit støy er gitt ved $\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{hvis } h = 0 \\ 0 & \text{hvis } h \neq 0 \end{cases}$. Dermed er spekteret

$f_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega} \gamma(n) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi}$, altså konstant, dvs. at alle frekvenser er like sterkt representert (mrk at uttrykket dukker opp som første ledd i (3.11) i generelle ARMA prosesser også). •

Eksempel 3.3: Spekteret til en MA(1) prosess

MA(1) prosessen er beskrevet ved: $O_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, der $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Da er spekteret gitt ved:

$f_O(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-i\omega}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos \omega + \theta^2)$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$. (Dette er samme uttrykket som i eksempel 3.1 med $\sigma^2 = (1 + \theta^2)^{-1}$, og $\theta = (2\rho)^{-1} (1 \pm \sqrt{1 - 4\rho^2})$). Vi vet fra før at MA(1) prosessen har positiv eller negativ "lag-1" korrelasjon (avh. av fortegnet til θ) som avgjør om spekteret er dominert av lave frekvenser eller høye. •

Eksempel 3.4: Spekteret til en AR(1) prosess

AR(1) prosessen er beskrevet ved: $O_t - \phi O_{t-1} = \varepsilon_t$, der $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Spekteret er gitt ved:

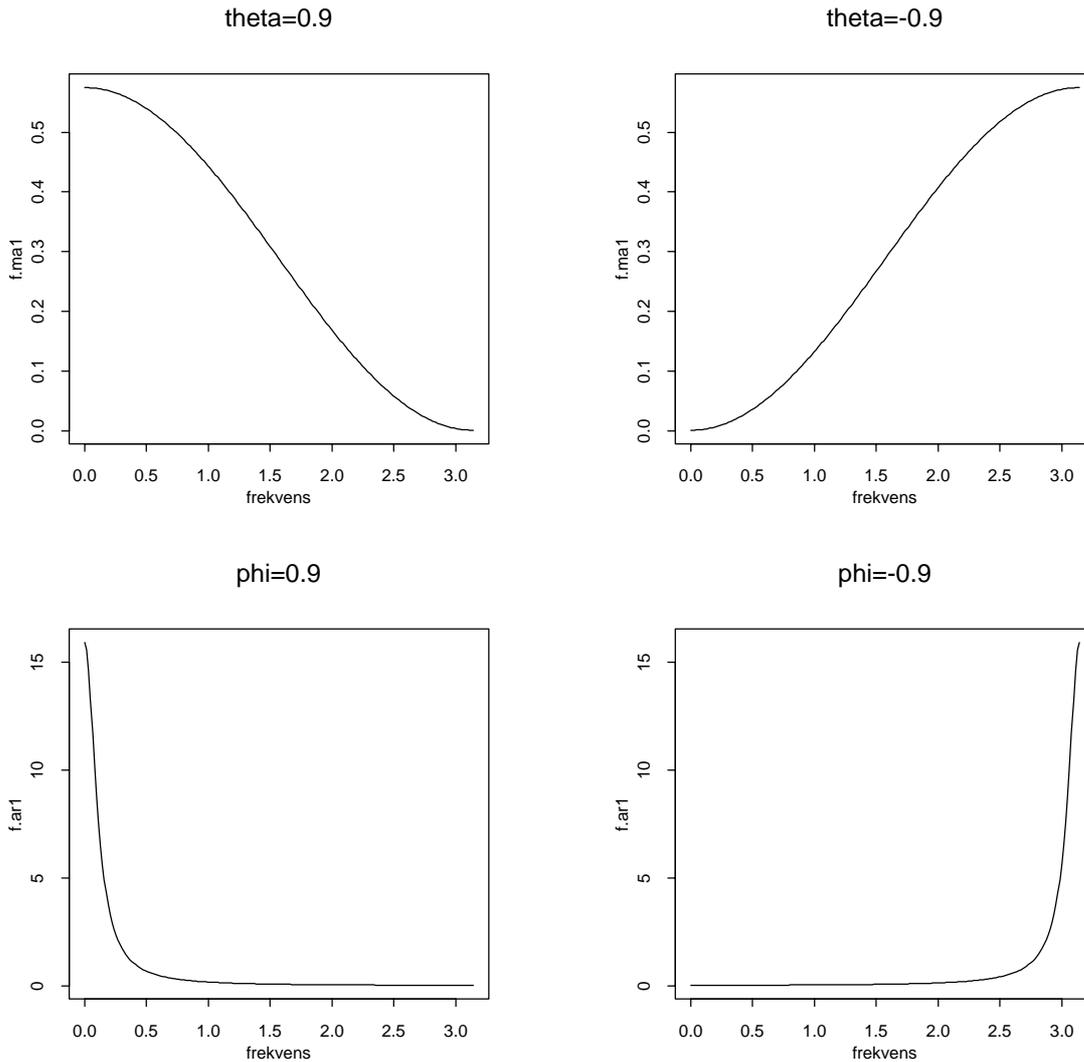
$$f_O(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \phi e^{-i\omega}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi \cos \omega + \phi^2)^{-1} \quad \bullet$$

Figuren neste side viser eksempler på spektre til AR(1) og MA(1) prosesser.

Før vi ser nærmere på høyere ordens prosesser, tar vi med definisjonen på kausalitet:

Kausalitet: En ARMA(p,q) prosess $\phi(B)O_t = \theta(B)\varepsilon_t$ er kausal hvis det finnes en sekvens av konstanter $\{\psi_j\}$ slik at $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ og $O_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, $t = 0, \pm 1, \dots$ (O_t er ikke avhengig av støy fremover i tid).

Med denne definisjonen på kausalitet kan man vise at en ARMA(p,q) prosess hvor $\phi(\cdot)$ og $\theta(\cdot)$ ikke har felles nullpunkter, er kausal hvis og bare hvis $\phi(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$ slik at $|z| \leq 1$ (altså at AR-polynomet ikke har røtter på eller innenfor enhets sirkelen). Dette er noen steder omtalt som krav til stasjonaritet, men egentlig er stasjonariteten egentlig med i definisjonen til ARMA(p,q) prosessen (se [3]).



Figur 9: Eksempler på spektre for MA(1) og AR(1) prosesser

Eksempel 3.5: Kausalitet (Stasjonaritet) i AR(1) og AR(2) prosess

For en AR(1) prosess $O_t = \phi O_{t-1} + \varepsilon_t$ er $\phi(z) = 1 - \phi z$ og kausalitet betyr her at $|\phi| < 1$.

For en AR(2) prosess er $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$. For å finne når denne har røtter utenfor enhetssirkelen kan man like godt betrakte det inverse polynomet $\phi(\frac{1}{z}) = 1 - \phi_1 \frac{1}{z} - \phi_2 \frac{1}{z^2}$ og finne når dette har røtter

innenfor enhetssirkelen, eller når $\phi^*(z) = z^2 - \phi_1 z - \phi_2$ har det. Røttene til $\phi^*(z)$ er $\frac{\phi_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\phi_1^2}{4} + \phi_2}$.

Disse er komplekse hvis $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ ($\phi_2 < -\frac{\phi_1^2}{4}$). La λ være en slik kompleks rot. Da er

$|\lambda|^2 = (\frac{\phi_1}{2})^2 - (\frac{4\phi_2 + \phi_1^2}{4}) = -\phi_2$ slik at hvis roten skal være innenfor enhetssirkelen må $-1 < \phi_2 < 0$. Med reelle røtter er $\phi^*(z)$ en parabel med åpning oppover og som krysser z-aksen i to nullpunkter. Ved å kreve $\phi^*(1) > 0$ og $\phi^*(-1) > 0$ garanterer dette at de reelle røttene er innenfor enhetssirkelen. Dette gir de to ulikhetene $\phi_1 + \phi_2 < 1$ og $\phi_2 - \phi_1 < 1$. Området som gir kausalitet i dette tilfellet er altså en trekant i (ϕ_1, ϕ_2) planet med parabelen som skiller mellom komplekse og reelle røtter. •

Fra før vet vi at analyse av autokovarians-funksjonen og av spekteret er ekvivalent, så det er rimelig at kausalitet og beliggenheten av røttene til AR-polynomet påvirker både autokovariansfunksjonen og spekteret. Konvergensraten mot 0 av $\gamma(h)$ når $h \rightarrow \infty$ i en AR(p) prosess er bestemt av nullpunktene i $\phi(z)$ som ligger nærmest enhetssirkelen. Jo nærmere enhetssirkelen jo saktere konvergens. To komplekskonjugerte røtter bidrar til en geometrisk dempet sinus, mens reelle røtter bidrar til geometrisk demping. Helt tilsvarende har plassering av røttene innvirkning på spekteret. Dette er illustrert i eksempelet nedenfor.

Eksempel 3.6: Forskjellige AR(2) prosesser

Nedenfor følger fire forskjellige AR(2) prosesser og figuren neste side viser ACF og spekteret til disse fire. For bedre tolkningsmulighet er prosessen skrevet på formen $(1 - \frac{1}{\xi_1}B)(1 - \frac{1}{\xi_2}B)O_t = \varepsilon_t$ hvor ξ_1 og ξ_2 er røttene. De fire tilfellene er (a) $\xi_1 = 2, \xi_2 = 5$, (b) $\xi_1 = \frac{10}{9}, \xi_2 = 2$, (c) $\xi_1 = -\frac{10}{9}, \xi_2 = 2$, og (d) $\xi_1, \xi_2 = \frac{2}{3}(1 \pm i\sqrt{3})$. Som vi ser er (b) og (c) begge nærmere enhetssirkelen enn (a) og (d) er komplekskonjugerte røtter. De fire øverste figurene viser autokorrelasjonen ($\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$) til (a) øverst til venstre, (b) øverst til høyre, (c) og (d). Nedenfor er spektraltettheten for de samme tilfellene. Den er gitt ved:

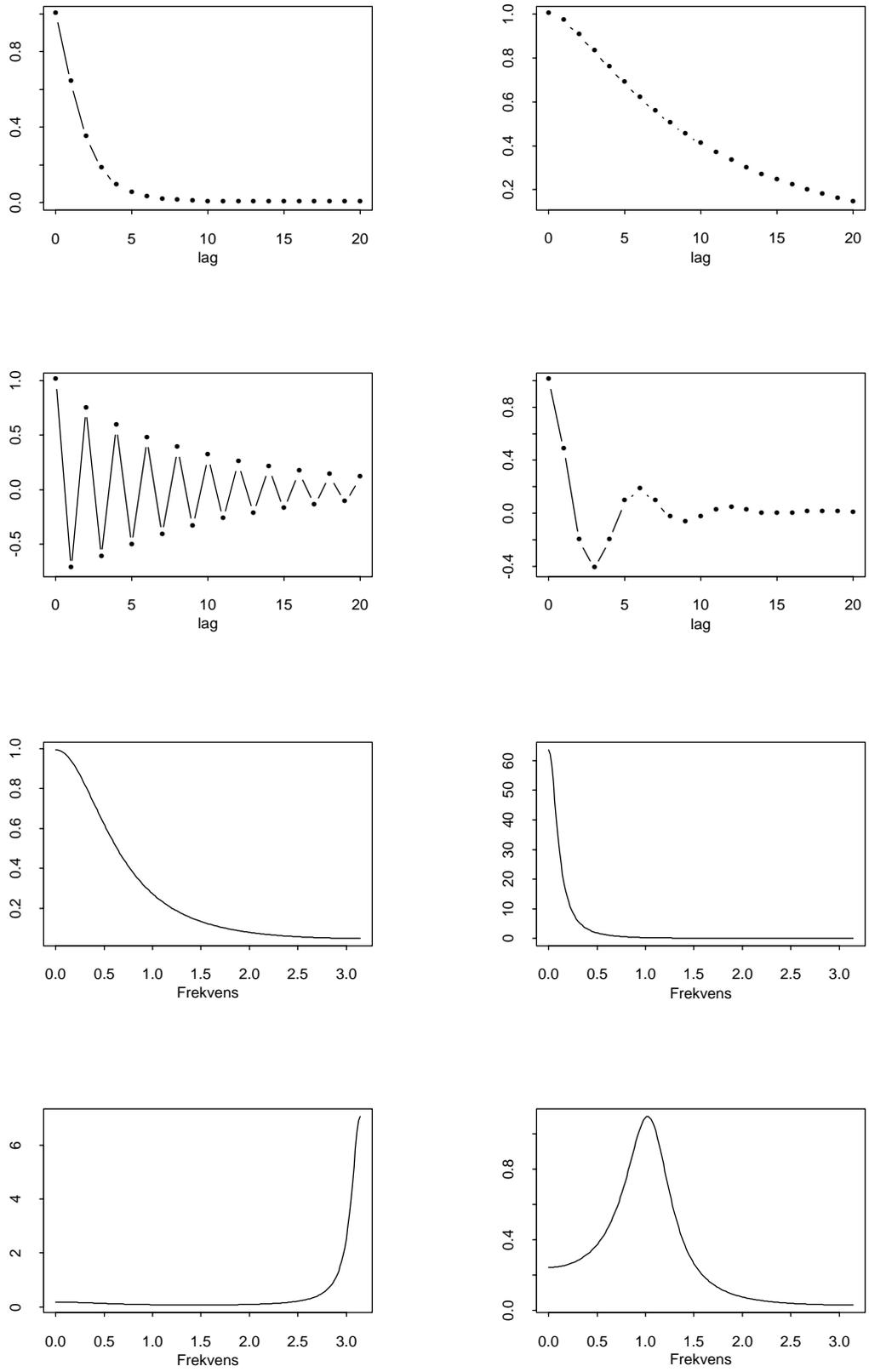
$$f_O(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1+\phi_1^2+2\phi_2+\phi_2^2+2(\phi_1\phi_2-\phi_1)\cos\omega-4\phi_2\cos^2\omega)} \cdot \bullet$$

Figuren viser at når autokorrelasjonen (ACF) går seint mot 0 (prosessen har god hukommelse) vil den også være dominert kraftigere av lave frekvenser (ev. høye frekvenser når autokorrelasjonen ossilerer). Med komplekskonjugerte røtter får man en prosess som inneholder en frekvenstopp mellom 0 og π , bestemt av røttene.

Spektralanalyse kan gi informasjon som ikke er like tilgjengelig gjennom autokovariansfunksjonen. Dette er illustrert i eksempelet nedenfor.

Eksempel 3.7: Sammenligning av ARMA(1,1) og AR(2)

En ARMA(1,1) prosess er ikke like fleksibel som en AR(2) prosess selv om den har like mange parametre. ARMA(1,1) prosessen kan ikke beskrive prosesser som tilfellet (d) i eksempel 2.6. For å se dette betraktes spektraltettheten til ARMA(1,1) som er gitt ved $f_O(\omega) = \frac{\sigma^2(\theta^2+2\theta\cos\omega+1)}{2\pi(\phi^2-2\phi\cos\omega+1)}$ og som har derivert lik $f'_O(\omega) = \frac{-2(\phi\theta+1)(\phi+\theta)\sin\omega}{(\theta^2+2\theta\cos\omega+1)^2}$. Røttene i nevneren er $-\cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega - 1}$. Når $\omega = 0, \pm\pi$ og antagelse om $|\theta| < 1$ (invertibilitet) er nevneren positiv. Når $0 < \omega < \pi$ er røttene komplekse, og dermed også nevneren positiv. $f'_O(\omega) = 0$ for $\omega = 0, \pm\pi$ (når vi antar at $\phi, \theta \neq 0$). Med $\theta > 0$ og $\phi < -\theta$ fås minimumspunkt i $\omega = 0$ og maksimum i $\omega = \pi$. Med $\theta > 0$ og $\phi > -\theta$ fås maksimum i $\omega = 0$ og minimum i $\omega = \pi$. Tilsvarende (men motsatt) fås når $\theta < 0$. •



Figur10: Autokorrelasjon (4 øverste) og spektraltetthet til forskjellige AR(2) prosesser

3.4. Filtrering i frekvensplanet

Vi kan nå gå tilbake til motivasjonen for spektralanalyse. Som nevnt i innledningen er litt av styrken til spektralanalysen nettopp dens evne til å sammenligne filtre i frekvensplanet. Vi skal bruke dette her til å sammenligne filtrene vi konstruerte i kapittel 2 og se at sammenligning i frekvensplanet gir ekstra informasjon.

I ligning (3.9) fremstilles den generelle lineære prosessen som filtrert hvit støy (f.eks. ARMA(p,q) prosessene). Da fremgår det i ligning (3.10) at spektralitet til utgangen av filteret er spektralitet til inngangen multiplisert med spektralitet til filteret, eller transferfunksjonen. Det betyr at man kan se hvilke frekvenser i inngangssignalet som blir dempet og hvilke som blir forsterket ved å betrakte transferfunksjonen til filteret.

Filtrene vi betraktet i kapittel 2 brukte vi på serier som hadde trend og sesong, og som derfor ikke er stasjonære. Hvilken sammenheng tilsvarende (3.10) gjelder mellom inngang og utgang av filteret i disse tilfellene? Hvis tidsserien inneholder deterministiske sinuskomponenter vil spektralfordelingen være diskontinuerlig i disse frekvensene (gjøre hopp der), og den er dermed ikke deriverbar, altså eksisterer ikke spektralitet og da kan man ikke utlede en slik sammenheng som i (3.10). Vi unngår dette problemet her ved å si at vår tidsserie er stasjonær og det oppnår vi ved å gjøre både trendfunksjonen og sesongfunksjonen stokastisk med forventning lik 0. Slik at vi har tidsserien som før:

$$O_t = T_t + S_t + I_t$$

men nå tenker vi oss at alle komponentene er stokastiske med forventning 0, slik at trendfunksjonen og sesongfunksjonen kan uttrykkes som:

$$(3.12) \quad T_t = \sum_{r=0}^k c_r t^r, \quad S_t = \sum_{j=0}^m \alpha_j \sin(\omega_j t + \theta_j)$$

der $\{c_r\}$ og $\{\alpha_j\}$ er tilfeldige variable med forventning lik 0, mens en realisasjon av prosessen har verdier for disse forskjellig fra 0. Dermed kan vi filtrere tidsserien som ikke egentlig er stasjonær og kan sammenligne transferfunksjonene til de forskjellige filtrene. (Egentlig er dette unødvendig fordi det gjelder tilsvarende resultater som (3.10) for ikke-stasjonaritet, se [8].)

Fra (3.10) har vi at transferfunksjonen til et filter er gitt ved:

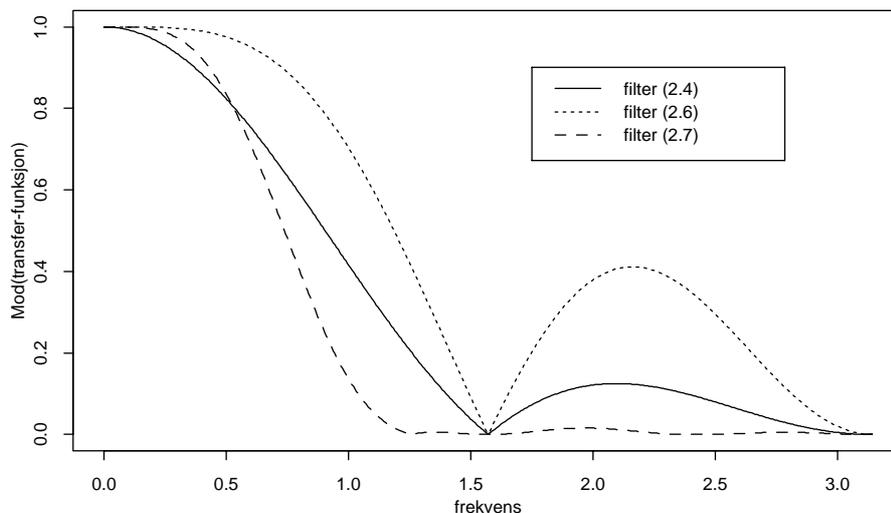
$$(3.13) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\omega}$$

(Fouriertransformen til filteret), der $\{\psi_j\}$ er selve filteret. Nå skal vi regne ut dette for filtrene våre fra kapittel 2.

3.4.1. Filtrene fra kapittel 2

Først ser vi på filteret som hadde lengde 5 og med koeffisienter gitt i ligning (2.4). På formen ovenfor får vi: $[\psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \psi_2] = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}]$. Setter vi dette inn i (3.13) får vi:

$$(3.14) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-2}^2 \psi_j e^{-ij\omega} = \frac{1}{8}(e^{i2\omega} + e^{-i2\omega}) + \frac{1}{4}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} 2 \cos(2\omega) + \frac{1}{4} 2 \cos(\omega) + \frac{1}{4}$$



Figur 11: Transfer-funksjonen til filterne fra kapittel 2

Denne er vist i figuren sammen med filterne i ligning (2.6) og ligning (2.7). Figuren viser Modulus til transferfunksjonen (altså lengden til det komplekse tallet), for å kunne sammenligne med noen andre tilfeller når transferfunksjonen ikke lenger er reell. På tilsvarende måte som i (3.14) er transferfunksjonen til filteret i (2.6) gitt ved:

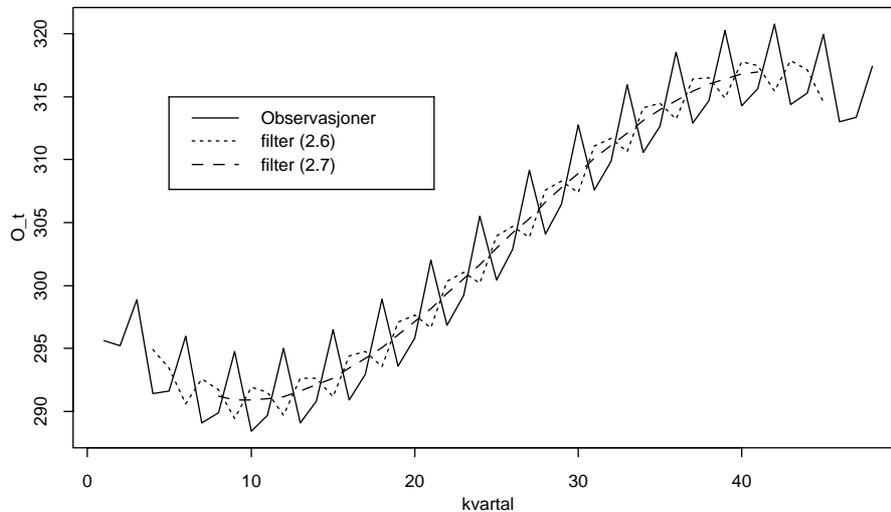
$$(3.15) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = -\frac{3}{32} 2 \cos(3\omega) + \frac{4}{32} 2 \cos(2\omega) + \frac{11}{32} 2 \cos(\omega) + \frac{8}{32}$$

og for Spencer filteret fra ligning (2.7):

$$(3.16) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \frac{1}{320} [(-6) \cos(7\omega) + (-12) \cos(6\omega) + (-10) \cos(5\omega) + 6 \cos(4\omega) + 42 \cos(3\omega) + 92 \cos(2\omega) + 134 \cos(\omega) + 74]$$

Vi ser tydelig forskjell på filterne i figuren. Det de har til felles alle 3, er at de fjerner helt frekvensen som har diskret frekvens $\omega = \frac{\pi}{2}$, som tilsvarer radian-frekvens $\Omega = \frac{\pi}{2\Delta}$, eller i svingninger pr. md: $f = \frac{1}{4\Delta}$ som med $\Delta = 3$ md. gir en frekvens på $\frac{1}{12}$ svingning pr. md. som igjen betyr periodetid på 12 md. og er nettopp den frekvensen vi ønsket å fjerne med sesongjustering. Derfor kan de alle brukes til det. Men vi ser f.eks. at det korteste filteret demper nesten lineært alle frekvenser som er lavere (altså som har større periode enn 1 år) og vil dermed forvrengte disse komponentene. Filteret med lengde 7 er litt bedre der, men på sin side forvrenger frekvenser som er høyere. Spencer filteret er absolutt best av disse hvis vi er interessert i å fjerne alle frekvenser over 1, fordi transferfunksjonen synker fort og blir værende liten. Det fungerer som et såkalt **lavpass** filter (lar de lave frekvensene passere), som vi også skal se andre eksempler på.

For å sammenligne filterne litt har vi variert periodisiteten i tidsserien. Vi har prøvd med en raskere frekvens med periodetid på 9 md, som tilsvarer den diskrete frekvensen $2\pi f\Delta = \frac{2\pi}{3}$ og en seinere frekvens med periode på 24 md, som tilsvarer $\frac{\pi}{4}$. Figuren nedenfor viser den raskeste frekvensen og den tidligere 3.ordens trendfunksjon. Sesongfunksjonen er gitt ved $(S_1, S_2, S_3) = (-2.5, -1.3, 3.8)$. I tillegg vises også de filtrerte seriene med filter (2.6) og (2.7).

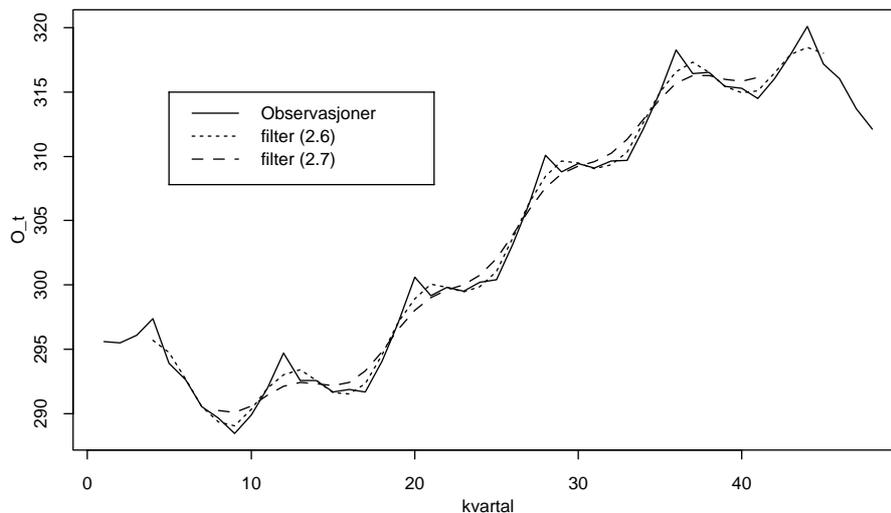


Figur12: Filtrering av høyere frekvenser

Figuren viser tydelig at filter (2.6) ikke fjerner denne frekvensen så godt som filter (2.7). Dette stemmer med transferfunksjonene i forrige figur.

Helt tilsvarende har vi sammenlignet de samme filtrene når frekvensen på sesongvariasjonen er $\frac{\pi}{4}$. Vi har brukt samme trendfunksjon som ovenfor og nå er sesongkomponentene gitt ved:

$(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8) = (-2.5, -1, 1, 3.5, 1, 0.5, -1, -1.5)$. Figuren nedenfor viser som den forrige de opprinnelige observasjonene og de filtrerte.



Figur13: Filtrering av lavere frekvenser

Vi ser igjen at filtreringen stemmer med transferfunksjonen i figur 11. Filter (2.6) lar observasjonene være mer ubehandlet enn filter (2.7) som demper periodisiteten ganske kraftig.

3.4.2. Differanseoperatoren

Nå har vi sett hvordan filtre vi har konstruert i tidsplanet ser ut i frekvensplanet. En metode som også er motivert i tidsplanet og som kan fjerne sesong og / eller trend, for å skape stasjonaritet (i stedet for å estimere komponentene hver for seg og så trekke dem fra) er bruk av differanser. Man innfører differanseoperatoren ∇ som anvendt på O_t gir: $\nabla O_t = O_t - O_{t-1}$. Med en lineær trend $T_t = c_0 + c_1 t$, får vi:

$$(3.17) \quad \nabla O_t = (c_0 + c_1 t) + S_t + I_t - (c_0 + c_1(t-1)) - S_{t-1} - I_{t-1} \approx c_1 + S_t - S_{t-1}$$

Som viser at vi har fjernet den lineære trenden og fremdeles har en sesong (litt forandret), men som er et dårlig sesongestimat i seg selv og som ikke kan føres tilbake til den opprinnelige sesongen. Hvis trenden er av høyere orden vil denne operatoren fjerne en orden av polynomet slik at anvendt på et 2. grads polynom står man igjen med en lineær trend, osv. Denne operatoren kan formuleres som et filter på vår form som (husk $M(O_t) = \sum_{j=-q}^q \psi_j O_{t-j}$):

$$(3.18) \quad [\psi_{-1}, \psi_0, \psi_1] = [0, 1, -1]$$

Som vi ser, er ikke summen av koeffisientene 1 her så det gjennomsnittlige nivået i tidsserien forandres og (2.3) er ikke oppfylt. Vi har fått lengden til å bli odde ved å legge til en 0. Ved å bruke (3.13) kan vi finne transferfunksjonen til dette filteret:

$$(3.19) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega} = 1 - (\cos \omega - i \sin \omega) = (1 - \cos \omega) + i \sin \omega$$

Denne er kompleks, og har Modulus:

$$(3.20) \quad |\Psi(e^{-i\omega})| = \sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2} = \sqrt{2(1 - \cos \omega)}$$

En annen variant av differanse-operatoren er ∇_d , som anvendt på O_t gir: $\nabla_d O_t = O_t - O_{t-d}$. Med periode $d = 4$ og lineær trend får vi:

$$(3.21) \quad \nabla_4 O_t = (c_0 + c_1 t) + S_t + I_t - (c_0 + c_1(t-4)) - S_{t-4} - I_{t-4} \approx 4c_1$$

som viser at vi har fjernet både sesong og trend og står tilbake med en konstant som ved en enkel lineær kurve-tilpasning lar seg estimere slik at man har fjernet fullstendig både trend og sesong, og uansett opp til en konstant nær. Hvis trenden er et høyere ordens polynom, vil også denne operatoren fjerne en orden fra polynomet. Den kan skrives på filterform som:

$$(3.22) \quad [\psi_{-4}, \psi_{-3}, \psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4] = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1]$$

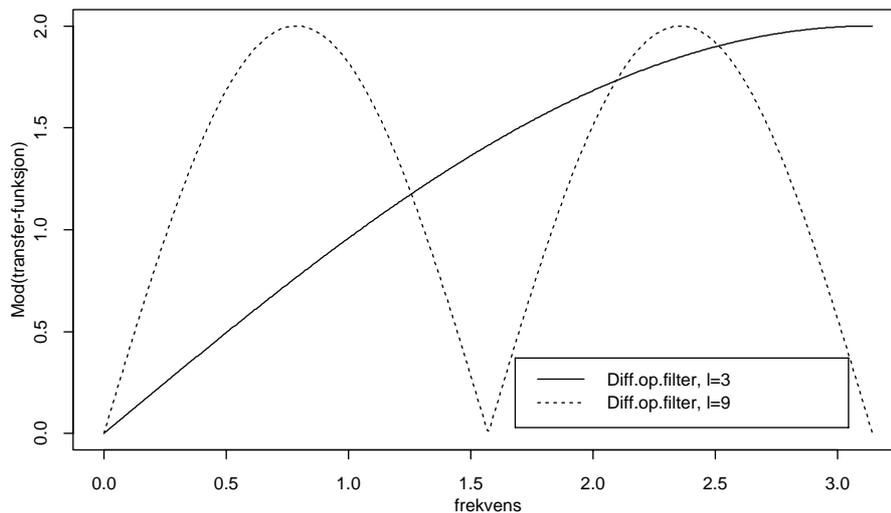
og har flg. transferfunksjon:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \Psi(e^{-i\omega}) &= \psi_0 + \psi_4 e^{-i4\omega} \\ &= 1 - (\cos(4\omega) - i \sin(4\omega)) = 1 - \cos(4\omega) + i \sin(4\omega) \end{aligned}$$

Igjen er denne kompleks, og har Modulus:

$$(3.24) \quad |\Psi(e^{-i\omega})| = \sqrt{(1 - \cos(4\omega))^2 + (\sin(4\omega))^2}$$

Figuren nedenfor viser (3.20) og (3.24) som er de to differanseoperatorene i frekvensplanet.



Figur14: Transferfunksjon til differanseoperatoren

Vi ser tydelig fra figuren det vi forventet, at begge filtrene tar vekk trenden, altså at transferfunksjonen er 0 for frekvens lik 0. Videre ser vi at differansefilteret med lengde 3 demper alle lave frekvenser veldig mye. Frekvensen med periode 12 md. forsterkes (transferfunksjonen > 1), og prøver vi dette filteret på eksempel 2.1 fås nettopp verdiene fra (3.17) som gir sekvensen $(-1, 2, -2, -5, -1, 2 - 2, -5, \dots)$ og vi ser at denne sekvensen har sterkere sesongmønster enn den opprinnelige sesongsekvensen. Alle frekvenser som har kortere periode enn 12 md. vil, som vi ser forsterkes enda mer og dette kan være uheldig.

Differansefilteret med lengde 9 har bedre egenskaper i at den stiger raskere slik at lave frekvenser blir bedre gjengitt. Den takler også vårt behov godt som vi ser av figuren, siden den tar helt vekk frekvenser lik 0 og med periode 12 md. Utover det er det uheldig med så stor forsterkning av mellomliggende frekvenser, og fjerning av riktig høye frekvenser (de som har periode ned mot 6 md.). Anvendt på eksempel 2.1 fås nettopp sekvensen vi kunne regnet oss frem til ved (3.21), nemlig $(-6, -6, -6, -6, \dots)$ som er stasjonær.

3.4.3. Lavpassfiltrering

I figur 1 illustrerte vi et filter med like vekter til alle observasjonene (glidende gjennomsnitt). Vi så i figuren at det glattet ut observasjonene, og kunne tenke oss at det fjerner høye frekvenser. Nå er vi istand til å finne transferfunksjonen til dette filteret. Et filter av lengde $(2q+1)$ som er gitt ved:

$$(3.25) \quad [\psi_{-q}, \dots, \psi_q] = \frac{1}{2q+1} [1, 1, 1, \dots]$$

har transfer-funksjon (fra 3.13):

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad \Psi(e^{-i\omega}) &= \sum_{j=-q}^q \frac{1}{2q+1} e^{-ij\omega} = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=0}^{2q} e^{-i(k-q)\omega} = \frac{1}{2q+1} e^{iq\omega} \sum_{k=0}^{2q} (e^{-i\omega})^k \\
&= \frac{1}{2q+1} e^{iq\omega} \frac{1-(e^{-i\omega})^{2q+1}}{1-e^{-i\omega}} = \frac{1}{2q+1} \frac{e^{iq\omega} - e^{-i(q+1)\omega}}{1-e^{-i\omega}} \frac{e^{i\frac{1}{2}\omega}}{e^{i\frac{1}{2}\omega}} = \frac{1}{2q+1} \frac{e^{i(q+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(q+\frac{1}{2})\omega}}{e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}} \\
&= \frac{1}{2q+1} \frac{\sin((q+\frac{1}{2})\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}, \quad \omega \neq 0
\end{aligned}$$

Når $\omega = 0$ er $\Psi(e^{-i\omega}) = 1$ (ses direkte av første rekke-uttrykket). Vi skal se nedenfor at denne transferfunksjonen er som et lavpass-filter, altså at det fjerner frekvenser over en viss grense. Antall ledd er med å bestemme hvor lav denne grensen er. Flere ledd betyr lavere grense.

Et ideelt lavpassfilter burde ha transferfunksjon lik:

$$(3.27) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{hvis } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

der ω_c er en forhåndsbestemt cut-off frekvens. Helt tilsvarende som (3.13) beskriver Fourier-transformasjonen av filteret, altså hvordan transferfunksjonen finnes fra koeffisientene, kan filterkoeffisientene finnes fra transferfunksjonen ved inverstransformasjonen: $\psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(e^{-i\lambda}) e^{ij\lambda} d\lambda$.

Med vår enkle transferfunksjon gir dette:

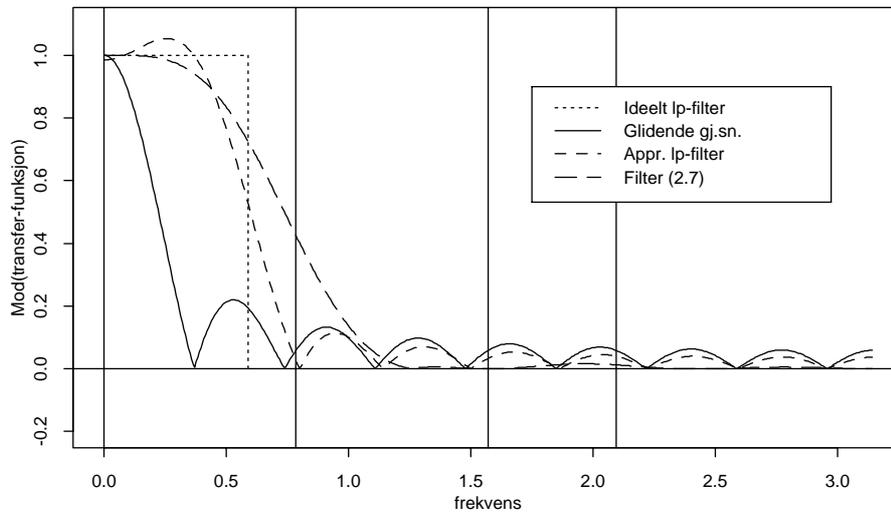
$$(3.28) \quad \psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{ij\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (\cos(j\lambda) + i \sin(j\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j} [\sin(j\lambda)]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{hvis } j = 0 \\ \frac{\sin(j\omega_c)}{j\pi}, & \text{hvis } |j| > 0 \end{cases}$$

Dette kan brukes for å finne en approksimasjon til det ideelle lavpassfilteret i (3.27). Vi trunkerer den uendelige summen i (3.13) for $|j| > q$, og får tilnærmingen:

$$(3.29) \quad \Psi(e^{-i\omega}) \approx \sum_{j=-q}^q \psi_j e^{-ij\omega}$$

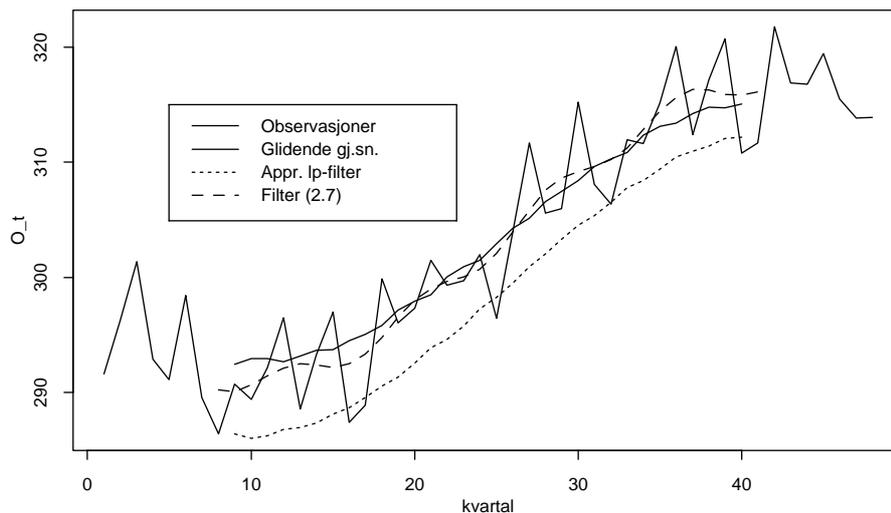
Med koeffisientene gitt ved (3.28). Et problem ved denne approksimasjonen er antall ledd, som må være ganske høyt for å få en god tilnærming. Høyt antall gir langt filter og dermed få filtrerte verdier når tidsserien ikke er så lang. Så dette er en avveining.

Vi skal prøve disse filtrene på vår tidsserie, nå med 3. ordens trendfunksjon og 3 forskjellige frekvenskomponenter, representert ved $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$. Figuren nedenfor viser transferfunksjonene til disse filtrene (filter 2.7 som også ble omtalt som et lavpassfilter er også tatt med), og de frekvensene som vi vet er med i tidsserien er markert med vertikale streker. Man kan velge q slik at transferfunksjonene f.eks. er nærmest mulig 0 for de aktuelle frekvensene man vil fjerne.



Figur 15: Forskjellige lavpass-filtre

Det approksimerte og det ideelle lavpassfilteret i figuren har begge $\omega_c = \frac{3\pi}{16}$. Både det glidende gjennomsnittet og det approksimerte lavpassfilteret har $q = 8$. Vi ser av figuren at alle begynner på 1 ved $\omega = 0$, bortsett fra det approksimerte lavpassfilteret som begynner litt under 0. Dette vil resultere i litt demping av nivået i trendfunksjonen. Videre ser vi at Spencerfilteret (2.7) ikke klarer å fjerne den laveste frekvensen i tidsserien vår, mens de to andre gjør det omtrent like bra (det appr. lavpassfilteret er så vidt best). De 2 høyere frekvensene fjerner Spencerfilteret best, mens de to andre gjør det omtrent like bra her også (det appr. lavpassfilteret er så vidt best).



Figur 16: Effekten av lavpass-filtrering

Figuren ovenfor viser hvordan de forskjellige lavpassfiltrene virker på tidsserien som inneholder de tre nevnte frekvenskomponentene. Som ventet kan man se rester av den laveste frekvensen i resultatet fra Spencerfilteret (2.7). Det gjennomgående for lave nivået som det approksimerte lavpassfilteret medfører synes tydelig også. Det glidende gjennomsnittet holder ganske riktig nivå gir nokså glatt resultat, men virker ikke helt parallell med de to andre, noe som kan skyldes at den fjerner for mye av de laveste frekvensene (se transferfunksjonen). Med lengre serier ville det vært mulig å bruke flere ledd i det approksimerte lavpassfilteret, noe som ville kunne gi bedre resultat.

3.4.4. Symmetriske kontra usymmetriske filtre

Vi har til nå, med unntak av differanseoperatoren, kun sett på symmetriske filtre. I kapittel 2 brukte vi symmetri som en begrensning da vi utledet filterne, noe som gjorde at vi fikk færre koeffisienter å bestemme, og enkelheten var begrunnelse god nok. Men det finnes også en annen god grunn for å bruke symmetriske filtre som vi skal drøfte her. X-12-ARIMA bruker kun symmetriske filtre, bortsett fra i enden av seriene der man ikke har nok data til filterets lengde. Filterne i X-12-ARIMA kommer vi tilbake til i kapittel 4 (de symmetriske).

Fra ligning (3.13) har vi at transferfunksjonen til et filter er gitt ved $\Psi(e^{-ij\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\omega}$.

Symmetri kan uttrykkes ved:

$$(3.30) \quad \psi_{-k} = \psi_k$$

for alle k. Bruker vi dette i uttrykket for transferfunksjonen får vi:

$$(3.31) \quad \Psi(e^{-ij\omega}) = \psi_0 + \sum_{j=1}^q \psi_j (e^{ij\omega} + e^{-ij\omega}) = \psi_0 + \sum_{j=1}^q \psi_j 2 \cos(j\omega)$$

(når filteret har odde antall ledd $2q+1$). Vi ser at sinus leddene forsvinner og transferfunksjonen er reell. For å forklare fordelene med at transferfunksjonen er reell må vi se på hva som skjer i frekvensplanet når filteret er usymmetrisk og da er et enkelt eksempel illustrerende. Vi tenker oss først det enkle symmetriske filteret

$$(3.32) \quad [\psi_{-1}, \psi_0, \psi_1] = [0, 1, 0]$$

Intuitivt vil dette slippe serien vår ubehandlet gjennom, og uttrykt i frekvensplanet skulle vi forvente at alle frekvensene i spekteret slipper udempet gjennom. Transferfunksjonen blir fra (3.31):

$$(3.33) \quad \Psi(e^{-i\omega}) = \psi_0 = 1, \quad |\Psi(e^{-i\omega})| = 1, \quad \angle \Psi(e^{-i\omega}) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\Psi)}{\text{Re}(\Psi)} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) = 0$$

med Modulus og vinkel i det komplekse planet som spesifisert. Dette er en reell transferfunksjon som er uavhengig av ω og siden Modulusen er 1 for alle frekvenser vil de som forventet forbli ubehandlet, dette er et såkalt **allpassfilter** (et filter som lar alle frekvenser passere). Når vinkelen i det komplekse planet (som kalles fasen) er 0 har denne ikke innvirkning. Hvis vi så ser på det usymmetriske filteret

$$(3.34) \quad [\psi_{-1}, \psi_0, \psi_1] = [0, 0, 1]$$

fremkommer den vesentlige forskjellen. Som i ste er filteret såpass enkelt at man kan forvente at filteret ikke gjør annet med serien enn en forskyvning i tid, etter formel (2.2)

$M(O_t) = \sum_{j=-1}^1 \psi_j O_{t-j} = O_{t-1}$. I frekvensplanet får vi flg. transferfunksjon:

$$\begin{aligned}
 \Psi(e^{-i\omega}) &= \psi_1 e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i \sin(\omega), \\
 (3.35) \quad |\Psi(e^{-i\omega})| &= \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1, \\
 \angle \Psi(e^{-i\omega}) &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\Psi)}{\text{Re}(\Psi)} \right) = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} \right) = \text{tg}^{-1}(-\text{tg}(\omega)) = -\omega
 \end{aligned}$$

Som vi ser er denne kompleks. Den har samme Modulus som den forrige, men fasen (vinkelen) er ikke lenger 0. Det er altså fremdeles et allpassfilter, men fasen er forskjellig fra 0 og må ha noe med tidsforsinkelsen å gjøre. Det kan vises at når fasen er en lineær funksjon av frekvensen (som her) blir alle frekvenser forsinket like mye, men når fasen ikke er lineær, som er lett å få til med et usymmetrisk filter, blir forsinkelsen forskjellig for forskjellige frekvenser. Det sier seg selv at det fører til alvorlig forvrengning hvis forskjellige frekvenskomponenter i den opprinnelige serien blir forskjøvet ulikt. Det betyr at fasen i et usymmetrisk filter har en innvirkning som er uoversiktlig og kan være umulig å beregne den nøyaktige virkningen av på en tidsserie som består av mange frekvenskomponenter.

For å vise virkningen av filtrene (både symmetrisk og usymmetrisk) på en bestemt frekvens, og i et tilfelle som ikke er degenerert som ovenfor (alle koeffisientene bortsett fra en er 0) ser vi på et eksempel med en serie som er en ren sinus, gitt ved:

$$(3.36) \quad O_t = c \sin(\omega t + \theta)$$

med en amplitude c og en fase (forskyvning fra origo) lik θ . Hva skjer med denne gjennom et symmetrisk / usymmetrisk filter? Først ser vi på det enkle symmetriske filteret fra kapittel 2:

$$(3.37) \quad [\Psi_{-1}, \Psi_0, \Psi_1] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

Den filtrerte serien kan uttrykkes:

$$\begin{aligned}
 (3.38) \quad M(O_t) &= \frac{c}{3} (\sin(\omega t + \omega + \theta) + \sin(\omega t + \theta) + \sin(\omega t - \omega + \theta)) \\
 &= \frac{c}{3} \left(2 \sin\left(\frac{2\omega t + 2\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\omega}{2}\right) + \sin(\omega t + \theta) \right) = \frac{c}{3} (2 \cos \omega + 1) \sin(\omega t + \theta)
 \end{aligned}$$

så vi ser virkningen av filteret er kun en faktor lik $\frac{2 \cos \omega + 1}{3}$. Frekvensen og fasen til den opprinnelige serien i (3.36) er m.a.o. urørt mens amplituden dempes med en faktor som er avhengig av frekvensen. For å se det samme i frekvensplanet ser vi på transferfunksjonen som er gitt fra (3.31) som:

$$\begin{aligned}
 (3.39) \quad \Psi(e^{-i\omega}) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} 2 \cos \omega = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \omega) \\
 |\Psi(e^{-i\omega})| &= \frac{1}{3} \sqrt{1 + 4 \cos \omega + 4 \cos^2 \omega} \\
 \angle \Psi(e^{-i\omega}) &= 0
 \end{aligned}$$

Gjøres filteret usymmetrisk slik at f.eks. :

$$(3.40) \quad [\Psi_{-2}, \Psi_{-1}, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2] = \left[0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

som tilsvarer at vi tar gjennomsnittet av de tre observasjonene ved tidspunkt t , $t-1$, $t-2$, skjer det samme som i ste at fasen får innvirkning. Direkte utregnet som i (3.38) gir dette:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} M(O_1) &= \frac{c}{3} (\sin(\omega t + \theta) + \sin(\omega t - \omega + \theta) + \sin(\omega t - 2\omega + \theta)) \\ &= \frac{c}{3} \left(2 \sin\left(\frac{2\omega t - 2\omega + 2\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\omega}{2}\right) + \sin(\omega t - \omega + \theta) \right) = \frac{c}{3} (2 \cos \omega + 1) \sin(\omega t - \omega + \theta) \end{aligned}$$

og vi ser at som i ste har vi en dempningsfaktor på amplituden lik $\frac{2\cos\omega+1}{3}$, men i tillegg har vi en forskyvning på en tidsenhet mot høyre av sinusen (i forhold til den opprinnelige serien i (3.36)). Frekvensen er uforandret, men nå har det altså skjedd en faseforskyvning pga. usymmetri i filteret.

For å se dette i frekvensplanet er utregningen av transferfunksjonen som i (3.39):

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \Psi(e^{-i\omega}) &= \psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega} + \psi_2 e^{-i2\omega} = \frac{1}{3} (1 + \cos \omega - i \sin \omega + \cos 2\omega - i \sin 2\omega) \\ &= \frac{1}{3} (1 + \cos \omega + \cos 2\omega - i(\sin \omega + \sin 2\omega)) \end{aligned}$$

Med følgende Modulus og fase:

$$(3.43) \quad \begin{aligned} |\Psi(e^{-i\omega})| &= \frac{1}{3} \sqrt{\operatorname{Re}(\Psi)^2 + \operatorname{Im}(\Psi)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(1 + \cos \omega + \cos 2\omega)^2 + (\sin \omega + \sin 2\omega)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{3 + 4 \cos \omega + 2 \cos 2\omega} = \frac{1}{3} \sqrt{1 + 4 \cos \omega + 2(1 + \cos 2\omega)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1 + 4 \cos \omega + 4 \cos^2 \omega} \end{aligned}$$

og

$$(3.44) \quad \begin{aligned} \angle \Psi(e^{-i\omega}) &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(\Psi)}{\operatorname{Re}(\Psi)} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\sin \omega + \sin 2\omega}{1 + \cos \omega + \cos 2\omega} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\sin \omega (1 + 2 \cos \omega)}{\cos^2 \omega + \sin^2 \omega + \cos \omega + \cos^2 \omega - \sin^2 \omega} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\sin \omega (1 + 2 \cos \omega)}{\cos \omega (1 + 2 \cos \omega)} \right) = \operatorname{tg}^{-1} (-\operatorname{tg} \omega) = -\omega \end{aligned}$$

og ved å sammenligne med (3.39) ser vi at Modulusen er den samme mens fasen (som igjen er en lineær funksjon av frekvensen) er nå ikke lenger 0 pga. usymmetrisk filter. Faseforskyvningen er nettopp den som dukket opp ved direkte beregning i (3.41). Hvis filterkoeffisientene i (3.40) alle hadde vært forskjellige istedenfor 1/3 ville fasen vært en ulineær funksjon av frekvensen og vi ville fått ulik faseforskyvning for forskjellige frekvenser.

Som oppsummering har vi altså sett at verken det symmetriske eller det usymmetriske filteret gjør noe med frekvensen i en ren sinus, mens amplituden blir dempet med en faktor som ev. er avhengig av frekvensen. Det usymmetriske filteret har så i tillegg en faseforskyvning som kan være ulik for forskjellige frekvenskomponenter når serien inneholder mange frekvenser. Dette er opplagt uheldig.

4. Filtrering i X-12-ARIMA

Metoden som benyttes for sesongjustering i X-12-ARIMA heter X-11. Denne metoden ble utviklet ved US Bureau of the Census midt på 1960 tallet, og har vært og er fremdeles kjernen i de forskjellige versjonene av dette programmet. Statistics Canada utviklet på 1970 tallet X-11-ARIMA som var forgjengeren til den nyeste versjonen som heter X-12-ARIMA og som nylig ble utviklet ved US Bureau of the Census. De siste versjonene har fått mer fleksibilitet og valgmuligheter, og mer avanserte metoder for behandling av ekstremverdier, kalendereffekter og skift i seriene, men kjernen i programmet er fremdeles den samme. Det er en iterativ algoritme med gjentatt bruk av lineære filtre som er det sentrale og som vi skal se på her.

Først litt "utvidet" notasjon: Gjentatte bruk av enkle gjennomsnitt brukes som "default" valg av filtre i X-12-ARIMA og betyr at man filtrerer den filtrerte serien gjentatte ganger og markeres med indekser som viser hvilke gjennomsnitt som benyttes. Filteret $M = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ brukt to ganger etter hverandre skrives:

$$\begin{aligned} M_{3 \times 3}(O_t) &= M(M(O_t)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}O_{t+2} + \frac{1}{3}O_{t+1} + \frac{1}{3}O_t\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}O_{t+1} + \frac{1}{3}O_t + \frac{1}{3}O_{t-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}O_t + \frac{1}{3}O_{t-1} + \frac{1}{3}O_{t-2}\right) \\ &= \frac{1}{9}O_{t+2} + \frac{2}{9}O_{t+1} + \frac{3}{9}O_t + \frac{2}{9}O_{t-1} + \frac{1}{9}O_{t-2} \end{aligned}$$

Eller på komprimert form: $M_{3 \times 3} = \frac{1}{9}[1, 2, 3, 2, 1]$. Generelt vil filteret $M_{p \times q}$ ha lengde $p + q - 1$.

X-11 metoden er laget for månedlige og kvartalsvise serier. Nå skal vi se på hvordan X-11 metoden vil fungere på en enkel kvartals - eller månedlig serie (de to mulighetene i X-12-ARIMA), uten å ta hensyn til ekstremverdier, kalendereffekter og skift i serien. Vi viser kun de filtrene som velges av programmet hvis man ikke spesifiserer spesielle ønsker og vi bruker den additive modellen fra kapittel 1 (X-12-ARIMA har multiplikativ modell og blanding av additiv og multiplikativ modell som alternativer), slik at serien modelleres som: $O_t = T_t + S_t + I_t$, der komponentene er som i kapittel 1. Trendfunksjonen (eller "trend-cycle") kan godt være en periodisk funksjon den også, og utfra erfaring tenker man på periodiske funksjoner med periode større eller lik 18 måneder som en del av trendfunksjonen.

4.1. Filtrering av den irregulære komponenten

I kapittel 2 brukte vi noen forenklete tilfeller som eksempler for illustrasjon av filtrering, og filtrene lot seg konstruere fordi vi visste eksakt periodisiteten i dataene og vi tok ikke den irregulære komponenten (støyen) med i betraktning. At trendfunksjonen faktisk var et polynom, og at sesongkomponentene var konstante over tid var de andre viktige forutsetningene for at filtrene skulle fungere. Da utledet vi filtre som slapp trendpolynomet gjennom ubehandlet og fjernet helt sesongkomponentene. Filtrene behandlet både trenden og sesongen samtidig. Sesongkomponentene fant vi ved å ta den opprinnelige serien og trekke fra trendfunksjonen. Det opplagt urealistiske her er at vi har sett på serier uten støy. Med støy til stede er det straks vanskeligere å dekomponere sesongkomponentene og trendfunksjonen. Som vi nevnte i kapittel 2 er filtrene lineære operatører og vil virke på alle tre komponentene i serien:

$$(4.1) \quad M(O_t) = M(T_t) + M(S_t) + M(I_t)$$

I kapittel 1 sa vi at siden støyen hadde forventning 0 og filtervektene er relativt små ville den filtrerte støyen være ignorerbar, og i de eksemplene vi så på var jo dette riktig fordi seriene ikke hadde støy. Den filtrerte støyen er i virkeligheten ikke nødvendigvis ignorerbar. Faktisk så kan filtrering av støyen

føre til ossilasjoner i serien som ikke var der i utgangspunktet. Dette kalles Slutsky-Yule effekten (se [6]), etter de to statistikerne som uavhengig studerte dette fenomenet først (1927). Etter litt teori om spektraltetthet (kapittel 3.3) og etter å ha sett transferfunksjonen til et enkelt gjennomsnitt i figur 15 forstår man at dette kan skje. Ligning (3.10) sier at spektraltettheten til den filtrerte serien er produktet av transferfunksjonen til filteret (kvadrert modulus) og spektraltettheten til en hvitstøyprosess. Her er det verdt å merke seg at dersom støyen ikke er hvit støy, men f.eks. en ARMA modell, så kan denne i seg selv betraktes som en filtrert hvitstøyprosess slik at transferfunksjonen til totalprosessen er produktet av transferfunksjonene til de to delprosessene med hvit støy som inngangsserie. Som tidligere nevnt (kapittel 3.4) gjelder tilsvarende resultat for ikke-stasjonære prosesser også (se [8]). Eksempel 3.2 viser at spektraltettheten til hvit støy er konstant og proporsjonal med variansen (altså at alle frekvenser er like sterkt representert). Dermed har vi at spektraltettheten til en hvitstøyserie som filtreres med et enkelt gjennomsnitt blir proporsjonal med den transferfunksjonen vi ser i figur 15. Der ser vi at alle frekvenser (bortsett fra de nær 0) blir dempet. Noen frekvenser (avhengig av antall ledd i gjennomsnittet) blir hvisket helt ut, mens noen blir dempet mer enn andre. Det betyr at de som dempes minst kan bli synlig som ossilasjoner i $M(I_t)$ fra (4.1) og dette vil forplante seg til $M(O_t)$. Hvis støyen ikke er hvit, vil det samme kunne skje, men bare at spekteret ikke nødvendigvis blir proporsjonalt med transferfunksjonen til gjennomsnittet.

4.2. Variansreduksjon

En opplagt god egenskap ved filtrene er å fjerne så mye som mulig av støyen I_t , dvs. redusere variansen mest mulig. Hvis støyen er hvit (altså ukorrelet i tid) med varians σ^2 vil variansen i den filtrerte irregulære komponenten være:

$$(4.2) \quad \text{Var}(M(I_t)) = \text{Var}\left(\sum_{j=-q}^q a_j I_{t+j}\right) = \sigma^2 \sum_j a_j^2$$

og hvis den ikke er hvit, f.eks. en ARMA prosess, kan den som nevnt ovenfor modelleres som en filtrert hvitstøyprosess så da gjelder også (4.2) med andre koeffisienter. Vi ser altså at for å redusere variansen i den irregulære komponenten mest mulig, må filteret ha så lav $\sum_j a_j^2$ som mulig, dette er filterets variansreducerende effekt. Hvis denne er f.eks. $= \frac{1}{2}$ halverer filteret variansen i den irregulære komponenten. Ved å betrakte filtreringen som en kurvetilpassning ved polynomer, kan man utlede det filteret som gir størst variansreduksjon, se [6]. Problemet lar seg nemlig formulere som en vanlig minste kvadraters tilpasning av et polynom av en ønsket orden til et bestemt antall punkter (som er lengden av filteret). Det man finner da er nettopp det polynomet som minimerer kvadratavvikene mellom polynomet og punktene, og ved å flytte ett punkt fremover adgangen og så gjøre en ny tilpassning av samme polynomorden utføres filtreringen. Dette illustreres best ved et eksempel.

Eksempel 4.1:

Vi vil finne filterkoeffisientene til et filter av lengde 7 som skal tilpasse et kubisk polynom best mulig til sett av 7 punkter. Da er $q = 3$ og orden av polynomet $k = 3$. Polynomet skrives

$T_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ og dette skal tilpasses observasjonsserien O_t . Minste kvadraters koeffisientene finnes ved å derivere kvadratsumforskjellene mellom O_t og T_t og sette lik 0, slik at vi får:

$$(4.3) \quad \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{t=-3}^3 (O_t - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3)^2 = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

som gir ligningene:

$$(4.4) \quad \sum_t t^j O_t - c_0 \sum_t t^j - c_1 \sum_t t^{j+1} - c_2 \sum_t t^{j+2} - c_3 \sum_t t^{j+3} = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

Ved å velge at polynomet skal legges midt på de 7 punktene med $t = 0$ på det fjerde punktet vil polynomet ha verdien c_0 der, så det holder å finne c_0 . Siden $\sum_t t = 0$ og $\sum_t t^3 = 0$ får vi flg. ligningssystem:

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 196 \\ 28 & 0 & 196 & 0 \\ 0 & 196 & 0 & 1588 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum O_t \\ \sum t O_t \\ \sum t^2 O_t \\ \sum t^3 O_t \end{pmatrix}$$

som gir flg. løsning for c_0 :

$$(4.6) \quad c_0 = \frac{1}{21} \left(7 \sum O_t - \sum t^2 O_t \right) = \frac{1}{21} (-2O_{-3} + 3O_{-2} + 6O_{-1} + 7O_0 + 6O_1 + 3O_2 - 2O_3)$$

eller på filterform:

$$(4.7) \quad \frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2]$$

Dette er altså filteret av lengde 7 som har maksimal variansreduksjon og samtidig bevarer opptil kubiske polynomer. Størrelsen på denne variansreduksjonen er gitt ved:

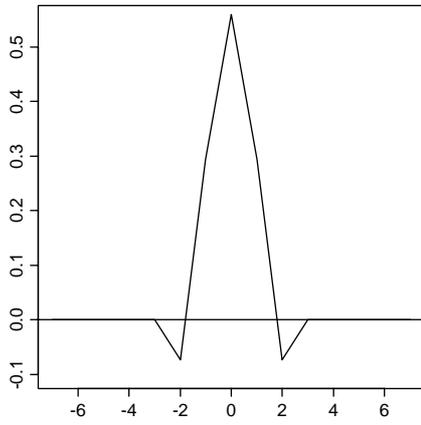
$\sum_{j=-3}^3 a_j = \left(\frac{1}{21}\right)^2 (2 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 36 + 49) = 0.3333$, som sier at filteret i (4.7) reduserer variansen med $2/3$. I [6] er det utledet tilsvarende filtre for forskjellig grad av polynomer (opptil femte grad) og forskjellig lengde (opptil 21 ledd). •

Tabellen i neste avsnitt viser variansreduksjonen i forskjellige filtre som vi har sett på og samt et mål på glatthet.

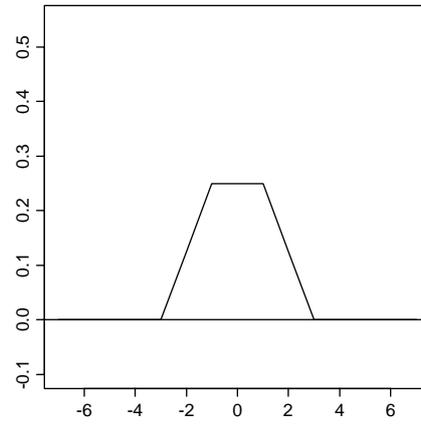
4.3. Glatthet

En viktig egenskap ved et trendfilter er å lage en glatt trend. Erfaring fra økonomiske serier gir at man betrakter alle frekvenser som er lavere enn frekvenser med periode på 18 måneder som en del av trenden. Det er såpass lav frekvens at trenden ikke vil inneholde brå forandringer. For å garantere glatte filtrerte serier brukes i X-11 metoden såkalte Henderson filtre, som er oppkalt etter R. Henderson som i 1916 og 1924 først foreslo et kriterium for glatthet, publisert i Aktuar-tidsskrifter, se [5]. Det han viser er at en filtrert serie er glattere jo glattere vektene er, dvs. jo mindre de forandrer seg fra ledd til ledd. Figuren nedenfor viser forskjellige filteres koeffisienter og illustrerer begrepet glatthet intuitivt.

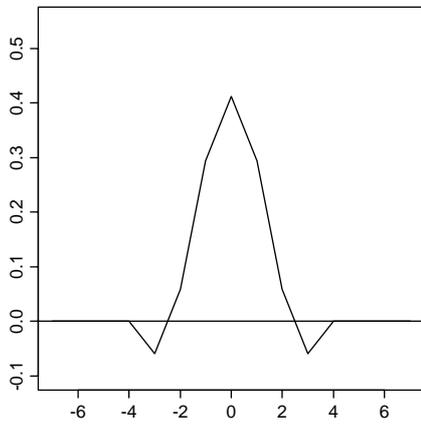
Henderson 5



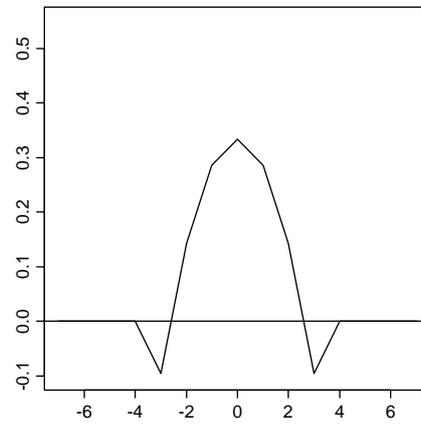
2x4



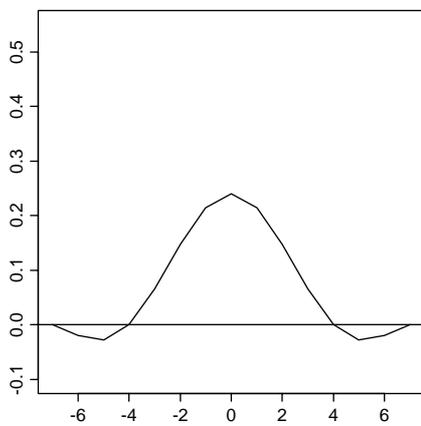
Henderson 7



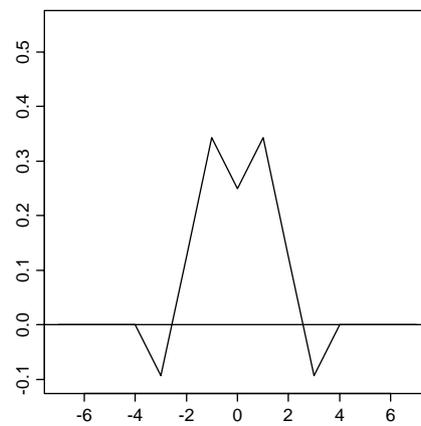
Kendall/Stuart, lengde=7



Henderson 13



Filter (2.6), lengde=7



Figur17: Glatthet til filterkoeffisientene i forskjellige filtre

Henderson formulerte kriteriet som det å minimere størrelsen:

$$(4.8) \quad H = \sum_j (\nabla^3 a_j)^2$$

der ∇ som i kapittel 3 er differanseoperatoren. H er lavere for høyere glatthet. Ved å minimere H og samtidig kreve bibetingelsene fra ligning (2.3) oppfylt for $k = 2$, finnes de Henderson filtrene som brukes i X-12-ARIMA. Filtrene er de som er glattest og samtidig bevarer polynomer av orden opptil 3 (siden filtrene er symmetriske vil de som bevarer 2. grads polynomer også bevare 3. grads).

Forskjellige filtre og deres variansreduksjonsevne og glatthet er vist i tabellen nedenfor. Forkortelsen K. / St. står for Kendall / Stuart og henviser til det filteret som har størst variansreduksjon og samtidig bevarer polynomer av orden opptil 3, slik som vist i eksempel 4.1. $l = 5$ betyr lengde = 5. Hend. er forkortelsen for Henderson filteret som brukes i X-12-ARIMA.

j	Enkelt gj.sn	K./St. l=5	2x4	3x3	Hend. l=5	Filter (2.6)	K./St. l=7	3x5	Hend. l=7	K./St. l=13	2x12	Hend. l=13
-6										-11/143	1/24	-325/16796
-5										0	1/12	-468/16796
-4										9/143	1/12	0
-3						-3/32	-2/21	1/15	-42/715	16/143	1/12	1100/16796
-2	1/5	-3/35	1/8	1/9	-21/286	4/32	3/21	2/15	42/715	21/143	1/12	2475/16796
-1	1/5	12/35	2/8	2/9	84/286	11/32	6/21	3/15	210/715	24/143	1/12	3600/16796
0	1/5	17/35	2/8	3/9	160/286	8/32	7/21	3/15	295/715	25/143	1/12	4032/16796
1	1/5	12/35	2/8	2/9	84/286	11/32	6/21	3/15	210/715	24/143	1/12	3600/16796
2	1/5	-3/35	1/8	1/9	-21/286	4/32	3/21	2/15	42/715	21/143	1/12	2475/16796
3						-3/32	-2/21	1/15	-42/715	16/143	1/12	1100/16796
4										9/143	1/12	0
5										0	1/12	-468/16796
6										-11/143	1/24	-325/16796
$\sum a_j^2$	0,2	0,486	0,219	0,235	0,496	0,348	0,333	0,164	0,357	0,175	0,08	0,204
$\sum (\nabla^3 a_j)^2$	0,48	2,015	0,125	0,148	1,497	1,238	0,753	0,036	0,263	0,175	0,014	0,008

Tabell 1: Forskjellige filtre av lengde 5, 7 og 13 og deres variansreduksjon og glatthet

Når vi sammenligner de forskjellige filtrene med lengde = 5 ser vi at det som har best variansreduksjon er det enkle gjennomsnittet. Det bevarer imidlertid kun rette linjer (polynom av orden 1) som er lett å vise (prøv), noe som gjelder både for dette, 2x4 filteret og 3x3 filteret. Tilsvarende som i eksempel 4.1 med et polynom av orden 1 kan man vise at det generelt er det enkle gjennomsnittet som gir størst variansreduksjon. Vi ser at 2x4 filteret har nesten like stor variansreduksjon og mye større glatthet. I tillegg vet vi fra før at 2x4 filteret fjerner sesongkomponenter av periode lik 1 år (noe som ikke gjelder for det enkle gjennomsnittet eller 3x3 filteret) så dette filteret er nyttig og vi skal se blir brukt i X-12-ARIMA. 3x3 filteret ligger nær opptil 2x4 filteret i variansreduksjon og glatthet, men fjerner ikke sesongkomponenter på 1 år (fjerner sesongkomponenter med noe kortere periode), derimot har det gode glatteegenskaper som vi kommer tilbake til og blir også brukt i X-12-ARIMA. Når det gjelder K./St. filteret med lengde 5 og Henderson med lengde 5 er dette filtre som begge bevarer polynomer av orden 3, og vi ser at dette går utover variansreduksjonsevnen. K./St. er det filteret som har høyest variansreduksjon (stemmer med teorien), men er til gjengjeld mye dårligere på glatthet enn Henderson.

Filtrene med lengde 7 har tilsvarende egenskaper. Vi legger generelt merke til at disse filtrene er bedre både på variansreduksjon og glatthet enn sine tilsvarende filtre med lengde 5. K./St. er igjen best på variansreduksjon (av de som bevarer 3. ordens polynom) og mye mer glatt enn K./St. med lengde 5. Vi ser også at det slår vårt eget filter fra kapittel 2 (filter (2.6)) mye på glatthet, men er på langt nær så

bra som Henderson. Filter (2.6) fjerner på sin side sesongkomponenten med 1 års periode. 3x5 filteret er suverent best, både på variansreduksjon og glatthet, men bevarer kun lineære trendfunksjoner.

Filtrene med lengde 13 gjenspeiler samme mønster igjen, og vi ser at de er absolutt bedre på begge måter. Nå kommer Hendersons filter til sin rett mht. glatthet og er best av de 3 (slår også 2x12), selv om det må gi avkall på litt variansreduksjon i forhold til K./St.. 2x12 filteret har veldig god variansreduksjon, men bevarer kun lineære trendfunksjoner. Det fjerner sesongkomponenter med periode 1 år for månedsserier og vil brukes i X-12-ARIMA med dette formål.

4.4. X-11 basis algoritme slik den brukes i X-12-ARIMA

Siden støyen gjør dekomponeringen av serien vanskelig, estimerer X-11 metoden komponentene hver for seg. Det blir gjort iterativt, slik at man prøver å estimere både trend og sesong komponent minst to ganger og med forskjellige filtre. Dette fordi noen filtre virker bedre f.eks. som trend estimering når sesongkomponenten er fjernet osv. En slik iterativ metode, hvor man hver gang kan velge mellom forskjellige filtre, er fleksibel. Den har utviklet seg over lang tid og prøver å benytte erfaringene som er gjort med sesongjustering ved prøving og feiling, selv om det kanskje er vanskelig å argumentere faglig for hvorfor akkurat denne algoritmen er bedre enn andre, hvorfor rekkefølgen på de forskjellige filtrene er som den er osv. Den begynner med et nokså "grovt" filter som tar bort vanlige sesongkomponenter, for å få tak i et foreløpig trendestimat, for så å bruke dette som utgangspunkt for et nytt sesongkomponent estimat. I [6, s 489] er det vist at man ikke trenger å gå veien om trendestimering for å få estimert sesongkomponenten, det kan gjøres direkte fra den opprinnelige serien, vel og merke i det additive tilfellet. Dette viser at rekkefølgen av filtrene ikke er entydig bestemt, det kan gjøres på flere måter. Nedenfor følger rekkefølgen av operasjonene i X-11 metoden:

Utgangspunktet er altså en ujustert kvartals- eller måneds-serie $O_t = T_t + S_t + I_t$.

1. Initiell estimering av trendfunksjonen med 2 x 4 (kvartal) eller 2 x 12 (måned) filtre:

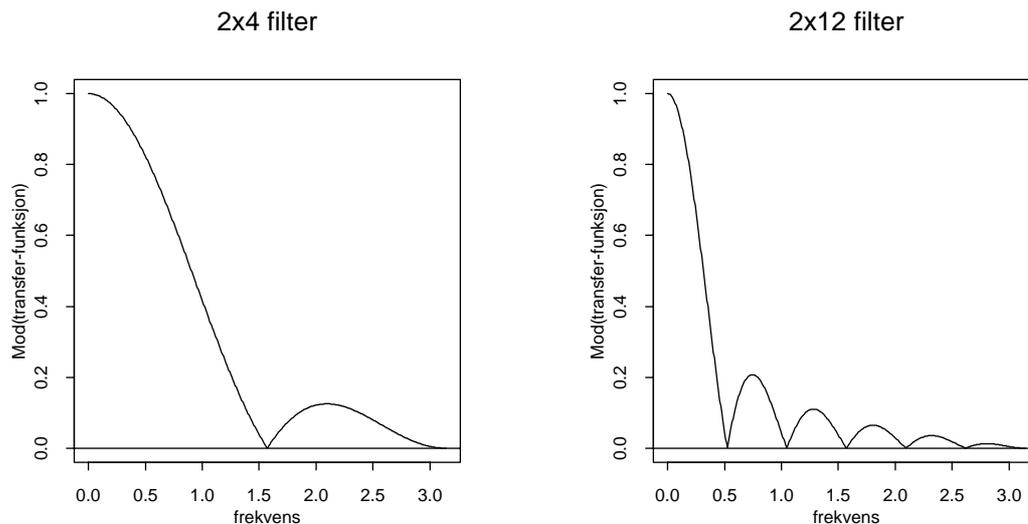
$$T_t^{(1)} = M_{2 \times 4}(O_t)$$
 (eller tilsvarende for månedsserie).
2. Initiell estimering av sesong-irregulær komponent: $(S_t + I_t)^{(1)} = O_t - T_t^{(1)}$
3. Initiell estimering av sesongkomponent ved 3 x 3 filter for hvert kvartal eller måned (forklares nedenfor): $S_t^{(1)} = M_{3 \times 3}[(S_t + I_t)^{(1)}]$ og normalisering: $\tilde{S}_t^{(1)} = S_t^{(1)} - M_{2 \times 4}(S_t^{(1)})$
4. Initiell estimering av sesongjustert serie: $A_t^{(1)} = (T_t + I_t)^{(1)} = O_t - \tilde{S}_t^{(1)}$
5. Ny estimering av trendfunksjon vha Henderson filter med lengde 7 (kvartal) eller 13 (måned): $T_t^{(2)} = H_7(A_t^{(1)})$
6. Estimering av sesong-irregulær komponent: $(S_t + I_t)^{(2)} = O_t - T_t^{(2)}$
7. Estimering av sesongkomponent ved 3 x 5 filter for hvert kvartal eller måned

$$S_t^{(2)} = M_{3 \times 5}[(S_t + I_t)^{(2)}]$$
 og normalisering: $\tilde{S}_t^{(2)} = S_t^{(2)} - M_{2 \times 4}(S_t^{(2)})$
8. Estimering av sesongjustert serie: $A_t^{(2)} = (T_t + I_t)^{(2)} = O_t - \tilde{S}_t^{(2)}$

Nedenfor følger litt forklaring til de forskjellige punktene under hvert sitt avsnitt med kapittelnummerering som referer til nummeret i listen.

4.4.1. Initiell estimering av trendfunksjon

Her brukes altså 2 x 4 filteret for kvartalsserien, eller 2 x 12 filteret for månedsserien. Transferfunksjonen til disse filtrene er vist i figuren nedenfor.



Figur18: Filtre for initielt trend estimat for kvartalsserie (venstre) og månedsserie (høyre)

Vi ser at 2×4 filteret tar bort frekvenser $= \frac{\pi}{2}, \pi$ som med et samplingsintervall på 3 måneder gir en periode på 1 år og $\frac{1}{2}$ år. 2×12 filteret tar bort frekvensene $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}$ som tilsvarer perioder på 1 år, 6 måneder, 4 måneder, 3 måneder, $\frac{12}{5}$ måneder, 2 måneder. 2×4 filteret kunne kanskje tatt bort litt flere sesonger, men vi må huske på at sesonger på 18 måneder regnes med i trendfunksjonen (skal ikke bort fra trendfunksjonen) og dette tilsvarer $\frac{\pi}{6}$. Vi husker fra tabell 1 at disse filterne gir meget god variansreduksjon i støyen og glatthet i den filtrerte serien og egner seg derfor som initielle trendfunksjonsestimater. De bevarer imidlertid kun lineære trender og dette må også huskes på.

4.4.2. Initiell estimering av sesong-irregulær komponent

Denne estimeres enkelt og greit ved å trekke den nylig estimerte trenden fra observasjonene og gir oss dermed fra modellen sesongkomponenten og den irregulære komponenten.

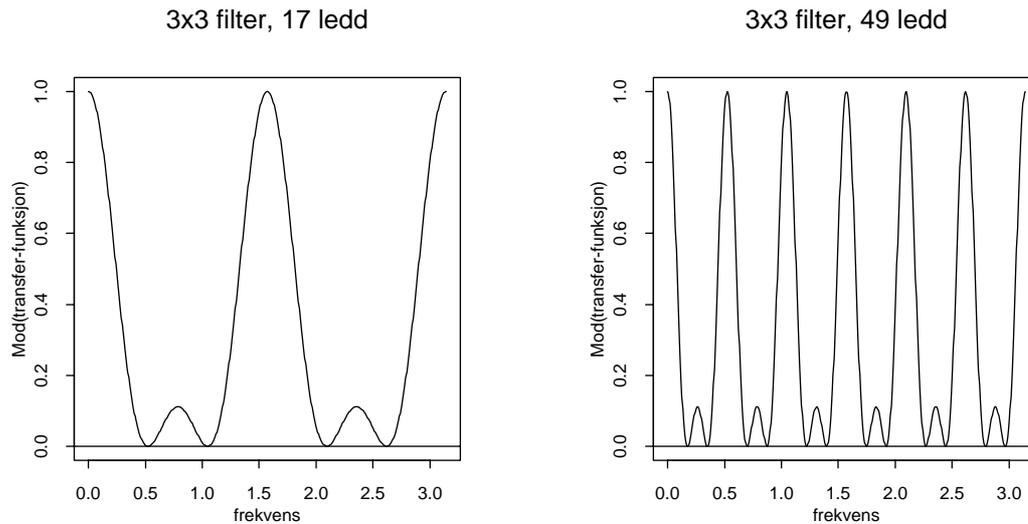
4.4.3. Initiell estimering av sesongkomponent

Her brukes 3×3 filter både for kvartalsserier og for månedsserier, men av forskjellig lengde. Filterne skal virke på hvert kvartal (måned) for seg og må derfor fylles med 0-er mellom hvert ledd for å oppnå den ønskede effekten. For kvartalsserien får vi i stedet for det vanlige 3×3 filteret: $\frac{1}{9}[1, 2, 3, 2, 1]$ et lengre filter med lengde 17:

$$(4.9) \quad \frac{1}{9}[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1]$$

Dette gjør at alle leddene (forskjellig fra 0) virker på samme kvartal (måned). For månedsserien fås et tilsvarende filter med lengde 49. Transferfunksjonen til disse filterne er vist i figuren nedenfor.

Vi ser at for kvartalsserien blir frekvenser som er veldig lave, som har periode ca. 1 år og som har periode $\frac{1}{2}$ år sluppet uforandret gjennom, og det er dette som er meningen, alle andre frekvenser blir dempet. For månedsserien blir alle frekvensene som ble fjernet i trendfilteret her sluppet gjennom ubehandlet. Grunnen til at 3×3 filteret brukes, og ikke f.eks. et enkelt gjennomsnitt er at 3×3 filteret gir lavere "sidelober", de frekvensene som ikke skal slippe gjennom, og det har mye bedre glatthet enn f.eks. det enkle gjennomsnittet (kfr. tabell 1). Etter filtreringen foretas en normalisering, som kun er for at summen av sesongkomponentene over hele perioden skal være 0 (kfr. kapittel 2).



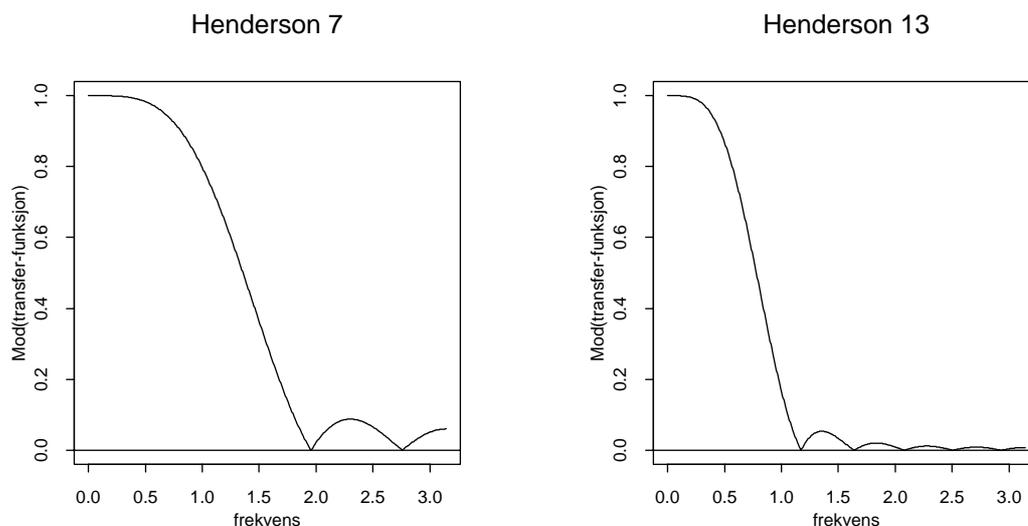
Figur19: Filtre for initielt sesongestimat for kvartalsserie (venstre) og månedsserie (høyre)

4.4.4. Initiell estimering av sesongjustert serie

Det forklarer seg selv, at ved å ta observasjonene og trekke fra den nylig estimerte og normaliserte sesongkomponenten fås en foreløpig sesongkorrigert serie.

4.4.5. Trendestimering ved Hendersonfiltre

Som beskrevet under avsnittet med glatthet, er disse filtrene utviklet først og fremst med det i tankene. Evnen til å ta bort forskjellige sesongkomponenter er ikke tatt i betraktning, og derfor egner disse filtrene seg best når man har fjernet mye av sesongen. Transferfunksjonen til Hendersonfiltre med lengde 7 og 13 er vist i figuren nedenfor, og er default verdier i X-12-ARIMA. For kvartalsserier kan Henderson med lengde 5 brukes, og for månedsserier er alternativene Henderson med lengde 9, 17, eller 23. Faktisk kan man spesifisere lengde selv i X-12-ARIMA, et hvilket som helst oddetall, eller man kan la programmet selv bestemme passende lengde på bakgrunn av forholdet mellom støy og gjennomsnittlig trendforandring.



Figur20: Hendersons trendfiltre for kvartalsserie (venstre) og månedsserie (høyre)

Transferfunksjonene ligner på lavpass-filtre som synker fort over en viss grense og demper alle høyere frekvenser mye. Fra tabell 1 vet vi at glattheten (spesielt med lengde 13) i filtrene er gode. Støyen skal ha blitt redusert kraftig i første iterasjon, så derfor er ikke variansreduksjonsevnen kritisk (selv om den også er bra). Det som i tillegg til stor glatthet er viktig med Henderson filtrene er at de bevarer 3. ordens polynomer som er en god egenskap for et trendfilter.

4.4.6. Estimering av sesong-irregulær komponent

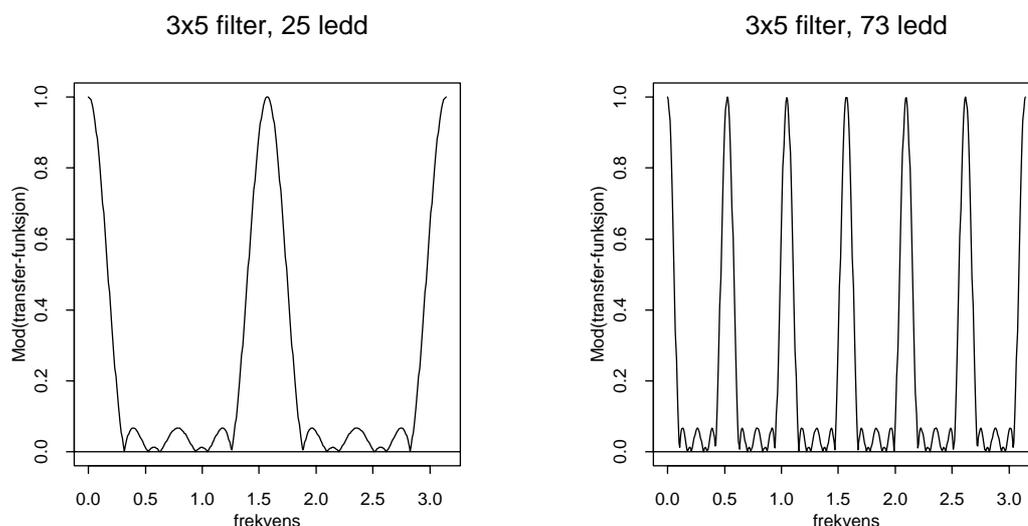
Her gjøres som i første iterasjon, den nylig estimerte trenden trekkes fra observasjonene for å gi resten som må være sesong og støy.

4.4.7. Estimering av sesongkomponent

Som i første iterasjon er man nå interessert kun i sesongkomponenten og glatte og normalisere denne. Nå er serien av bedre kvalitet og man kan bruke glattefiltre som er skarpere (dvs. slipper mindre igjennom) og er lengre som gir bedre variansreduksjon og glatthet. Da brukes 3 x 5 filteret (kan også velge å bruke 3 x 9). Det vil i kvartalsserien i stedet for det vanlige 3 x 5 filteret $\frac{1}{15}[1, 2, 3, 3, 3, 2, 1]$ være av lengde 25 (for månedsserien ha lengde 73):

$$(4.10) \quad \frac{1}{15}[1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1]$$

Transferfunksjonene til disse filtrene er vist i figuren nedenfor. Vi ser at de ligner veldig på 3 x 3 filtrene, bare litt smalere i toppene som gjør at de slipper litt færre frekvenser igjennom (man har mindre støy i serien som skal filtreres).



Figur21: Filtre for sesong estimering, kvartalsserie (venstre) og månedsserie (høyre)

Normalisering for å gi sesongkomponenter som summeres til 0 er som i første iterasjon.

4.4.8. Estimering av sesongjustert serie

Ved å trekke den nylig estimerte sesongkomponenten fra observasjonene fås den ferdig sesongjusterte serien.

5. Spektralestimering

Det vi har sett på hittil, er situasjoner hvor vi har hatt mer, eller mindre kunnskap om frekvensinnholdet i tidsserien. Vi har sett på enkle eksempler hvor det er opplagt hvilken periodisitet som er til stede ved å betrakte tidsserien, eller i det minste har vi hatt en formening om hvilke frekvenser som skal fjernes for vår sesongjustering. Men i litt mer kompliserte tidsserier er det ikke lett å se hvilke frekvenskomponenter som utgjør tidsserien. Da må man estimere spekteret, og det er temaet i dette kapittelet. Det tidligste (fra ca. 1900) og mest grunnleggende "verktøyet" for inferens om tidsserier i frekvensplanet har vært, og som brukes fremdeles er det såkalte periodogrammet. Det er en estimator for spektraltettheten.

Periodogrammet defineres ved først å stykke opp intervallet $[-\pi, \pi]$ i n Fourier-frekvenser, gitt ved $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, der $j = -[\frac{n-1}{2}], \dots, [\frac{n}{2}]$ (firkant parentes betyr heltall). Med disse frekvensene innføres så den diskrete Fourier-transformen til $\{O_t\}$ som $\{a_j\}$, der $a_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n O_t e^{-it\omega_j}$. Periodogrammet basert på de n observasjonene er gitt ved:

$$(5.1) \quad \text{Pdgm}_n(\omega_j) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n O_t e^{-it\omega_j} \right|^2 = |a_j|^2$$

Dersom $\{O_t\}$ er reell er $a_j = \bar{a}_{-j}$ og periodogrammet symmetrisk og dermed er det nok å betrakte intervallet $[0, \pi]$. Periodogrammet kan også skrives som $\text{Pdgm}_n(\omega_j) = \sum_{|k| < n} \hat{\gamma}(k) e^{-ik\omega_j}$, der $\hat{\gamma}(k)$ er det vanlige estimatet for ACVF. Denne siste formens likhet med uttrykket for spektraltettheten (se 3.8) viser motivasjonen for å bruke periodogrammet som estimator.

Ved utvidelse av definisjonen til å gjelde alle frekvenser kan man se at periodogrammet er asymptotisk forventningsrett ($E[\text{Pdgm}_n(\omega)] \rightarrow 2\pi f(\omega)$), for alle ω dersom forventningen i prosessen er $=0$, ellers er $E[\text{Pdgm}_n(0)] - n\mu^2 \rightarrow 2\pi f(0)$.

Den viktigste fordelingsegenskapen til periodogrammet kan oppsummeres i flg. resultat:

Hvis $\{O_t\}$ kan beskrives som en lineær prosess (kfr. 3.9) slik at $O_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, med $\{\varepsilon_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ (litt sterkere krav enn hvit støy), og $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, gjelder:

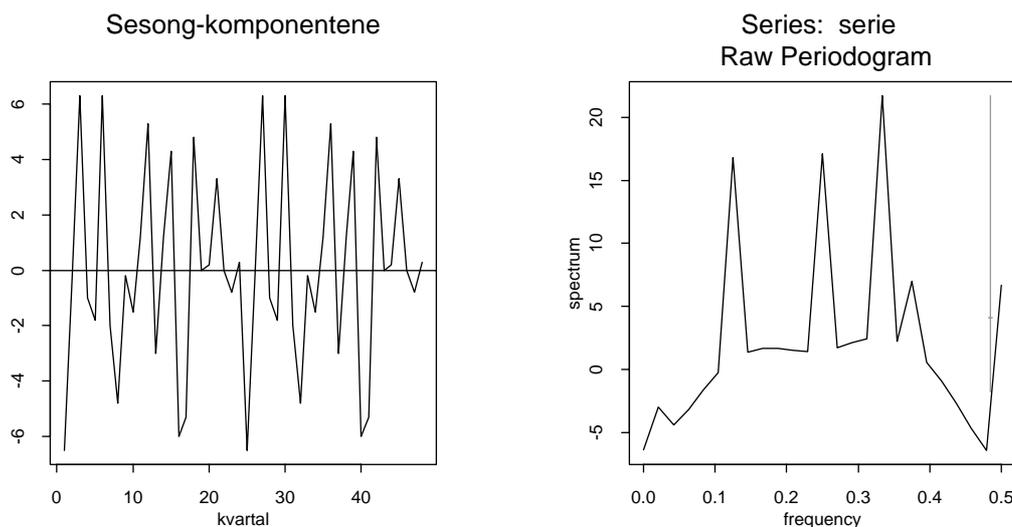
- Med positive spektraltetthet på $[-\pi, \pi]$ og m vilkårlige frekvenser vil den tilfeldige vektoren $(\text{Pdgm}_n(\lambda_1), \dots, \text{Pdgm}_n(\lambda_m))'$ konvergere i fordeling mot en vektor med m uavhengige og eksponentielt fordelte variable, hver med forventning $2\pi f(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$.
- Hvis koeffisientene går mot 0 med en viss hastighet og $\{\varepsilon_t\}$ har endelig 4. ordens moment vil det for Fourier-frekvensene gjelde at:

$$\text{Cov}(\text{Pdgm}_n(\omega_j), \text{Pdgm}_n(\omega_k)) = \begin{cases} 2(2\pi)^2 f^2(\omega_j) + \text{orden}(n^{-\frac{1}{2}}) & \text{hvis } \omega_j = \omega_k = 0 \text{ eller } \pi \\ (2\pi)^2 f^2(\omega_j) + \text{orden}(n^{-\frac{1}{2}}) & \text{hvis } 0 < \omega_j = \omega_k < \pi \\ \text{orden}(n^{-1}) & \text{hvis } \omega_j \neq \omega_k \end{cases}$$

Det første punktet her er det viktigste som forteller at periodogrammet er et forventningsrett estimat og at periodogramverdier i forskjellige frekvenser er uavhengige, men ikke konsistent. Siden man kan skrive $\text{Pdgm}_n(\lambda) \rightarrow 2\pi f(\lambda)Z$, for Z standard eksponentialfordelt, ser man at variansen ikke minker for økende n , og at den er proporsjonal med spekterverdien. Dette siste kan unngås ved å vise periodogrammet på log-skala.

Peter Diggle velger å "definere" spekteret som forventningen til periodogrammet ($2\pi f(\omega) = E[\text{Pdgm}_n(\omega)]$). Dette tydeliggjør forbindelsen med tradisjonell variansanalyse. Man kan nemlig vise at totalvariasjonen i dataene kan dekomponeres til periodogramverdiene i de forskjellige positive Fourier-frekvensene, slik at $\sum_t O_t^2 = \text{Pdgm}_n(0) + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{Pdgm}_n(\omega_j) + \text{Pdgm}_n(\pi)$ (den siste er med kun hvis n er et like tall). På denne måten måler periodogrammet for en bestemt F.-frekvens andelen av total-variasjonen i dataene som kan forklares ved en sinus med den frekvensen. Hvert periodogram-bidrag for frekvenser i $(0, \pi)$ vil ha 2 frihetsgrader (siden en standard eksponentialfordeling er $\frac{1}{2}\chi_2^2$). At periodogramets varians ikke minker med økende antall observasjoner er vanlig å tolke som en dårlig estimerings-egenskap, men Diggle mener at det snarere fremhever at periodogrammet ikke må betraktes som noe annet enn en transformasjon av dataene. Denne transformasjonen gjør strukturen i dataene lettere å behandle pga. uavhengigheten. Sammenlignet med ACVF-analysen er i det hele tatt analysen av spekteret lettere fordi kravene til et spekter er lettere å sjekke (symmetrisk, ikkenegativt og endelig integral).

Figuren nedenfor viser de tre sesongkomponentene (uten trendfunksjon) som vi brukte under filtreringen i kapittel 3, og det tilhørende periodogrammet. Legg merke til at vår periodiske serie består ikke av en sum av enkelte sinus-komponenter. Siden den er periodisk, finnes en sum av sinus-komponenter som tilnærmer serien vilkårlig godt, men det må veldig mange komponenter til for å få dette til, og derfor har denne serien en spektraltetthet. Periodogrammet viser hvilke frekvenskomponenter som er dominerende og vi ser det stemmer med fasiten. Frekvensen måles her i perioder pr. sampel (f_ω), og y-aksen i dB (som er $10 \log_{10}(\hat{f}_\omega(\lambda))$) for at variansen skal være uavhengig av spekterverdien (konfidensintervallet får samme lengde for alle frekvenser).



Figur 22: Sesong-komponenter og periodogrammet

5.1. Konsistente spektralestimatører

Siden periodogram-verdiene er asymptotisk uavhengige og med varians som varierer lite over et lite frekvensintervall, er det naturlig å tenke seg at ved å midle periodogram-verdiene over dette intervallet vil man kunne få en konsistent estimator hvis man sørger for at antall frekvenser man midler over øker når n øker. Antall Fourierfrekvenser øker omtrent lineært med n , så ved å midle periodogram-verdiene over et passende intervall rundt hver frekvens fås en konsistent estimator som kalles "**Discrete Spectral Average Estimator**". Den er definert for en vilkårlig frekvens til å være verdien den har for den nærmeste Fourier-frekvensen. For en Fourier-frekvens er den gitt ved:

$$(5.2) \quad \hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m_n} W_n(k) \text{Pdgm}_n(\omega_{j+k})$$

Der m_n vokser med n (men seinere, slik at når $n \rightarrow \infty$ gjør også m_n det (frekvenser man midler over), og samtidig går bredden av intervallet man midler over mot 0), og det er visse krav til vektfunksjonen $W_n(k)$ (summen er =1, ikke-negativ, symmetrisk om 0, og kvadratsummen går mot 0). Med $\{O_t\}$ som en lineær prosess (se forrige side) og krav til konv. hastigheten av koeffisientene samt eksisterende 4. ordens moment, vil flg. gjelde når $n \rightarrow \infty$ (her er forventningen til $\{O_t\}$ antatt å være 0):

- $E\hat{f}(\omega) \rightarrow f(\omega)$
- $\left(\sum_{|j| \leq m} W_n^2(j) \right)^{-1} \text{Cov}(\hat{f}(\omega), \hat{f}(\lambda)) \rightarrow \begin{cases} 2f^2(\omega) & \text{hvis } \omega = \lambda = 0 \text{ eller } \pi \\ f^2(\omega) & \text{hvis } 0 < \omega = \lambda < \pi \\ 0 & \text{hvis } \omega \neq \lambda \end{cases}$

Med oppgitt krav til kvadratsummen av vektfunksjonen (går mot 0) vil denne estimatoren dermed være konsistent. Hvis man ikke vet noe om forventningen til $\{O_t\}$ må $\hat{f}(0)$ estimeres spesielt.

Eksempel 5.1: Glidende gjennomsnitt

Anta $m_n = \sqrt{n}$, og $W_n(k) = (2m_n + 1)^{-1}$, $|k| \leq m_n$ som oppfyller kravene til vektfunksjonen og intervallbredden. Dette gir det konsistente estimatet:

$$(2\sqrt{n} + 1)\text{Var}(\hat{f}(\lambda)) \rightarrow \begin{cases} 2f^2(\lambda) & \text{hvis } \lambda = 0 \text{ eller } \pi \\ f^2(\lambda) & \text{hvis } 0 < \lambda < \pi \end{cases} \bullet$$

Dette eksempelet illustrerer avveingsproblemet til denne typen estimatorer. At for et gitt antall observasjoner vil valg av vekt-funksjon og intervall-bredde for å få liten varians kunne gi stor bias. Liten varians oppnås med stor m_n , men da blir intervallbredden større og midlingen av periodogram-verdien gjøres på bakgrunn av frekvenser som er lengre unna den aktuelle, noe som kan gi større skjevhet. I dette eksempelet er intervallbredden lik $\frac{2\pi}{n} 2\sqrt{n} = \frac{4\pi}{\sqrt{n}}$ som blir mindre når n vokser.

En annen måte å oppnå konsistent spektral-estimat er "**Lag Window Estimators**" som er estimatorer spesifisert på flg. form:

$$(5.3) \quad \hat{f}_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq r} w\left(\frac{h}{r}\right) \hat{\gamma}(h) e^{-ih\omega}$$

hvor $w(x)$ er det såkalte "lag window" og er en like-funksjon, $|w(x)| \leq 1$, $w(0) = 1$, og $=0$ for $|x| > 1$. Hvis $r = r_n$, en funksjon av n , og slik som m_n ovenfor vil \hat{f}_L være en sum av $(2r + 1)$ ledd, hver med varians som er av orden (n^{-1}) . Dette gir konsistens når $r_n/n \rightarrow 0$. Dette spektral-estimatet kan approksimeres med forrige metode ved å innføre et spektral vindu: $W(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{|h| \leq r} w(\frac{h}{r}) e^{-ih\omega}$. Da gjelder flg. approksimasjon $\hat{f}_L(\omega) \approx (2\pi)^{-1} \sum_{|j| \leq [\frac{n}{2}]} \frac{2\pi}{n} W(\omega_j) \text{Pdgm}_n(\omega + \omega_j)$, altså en "Discrete Spectral Average Estimator" med $W_n(j) = \frac{2\pi}{n} W(\omega_j)$, $|j| \leq [\frac{n}{2}]$. Mrk. at disse approksimerte vektene ikke nødvendigvis tilfredsstiller de tidligere omtalte kravene til vektene (summen=1 osv.), men kan normaliseres.

Det kan vises at når $n \rightarrow \infty$ og $r = r_n$ som ovenfor har man flg. resultat for $0 \leq \omega \leq \pi$:

- $E\hat{f}_L(\omega) \rightarrow f(\omega)$
- $\frac{n}{r} \text{Var}(\hat{f}_L(\omega)) \rightarrow \begin{cases} 2f^2(\omega) \int_{-1}^1 w^2(x) dx & \text{hvis } \omega = 0 \text{ eller } \pi \\ f^2(\omega) \int_{-1}^1 w^2(x) dx & \text{hvis } 0 < \omega < \pi \end{cases}$

Som viser konsistens.

Eksempel 5.2: Rektangulært vindu

Med $w(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ får man $W(\omega) = (2\pi)^{-1} \frac{\sin((r + \frac{1}{2})\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ (Dirichlet kjernen). Dette gir ved

uttrykket ovenfor asymptotisk varians lik: $\text{Var}(\hat{f}_L(\omega)) \approx \frac{2r}{n} f^2(\omega)$, for $0 < \omega < \pi$. •

Eksempel 5.3: Triangulært vindu

Med $w(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{hvis } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{hvis } |x| > 1 \end{cases}$ får man $W(\omega) = (2\pi r)^{-1} \frac{\sin^2(\frac{r\omega}{2})}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}$ (Fejer kjernen). Approksimert

variens blir: $\text{Var}(\hat{f}_L(\omega)) \approx \frac{2r}{3n} f^2(\omega)$, for $0 < \omega < \pi$. Dette betyr mindre asymptotisk varians enn for rektangulært vindu med samme r . •

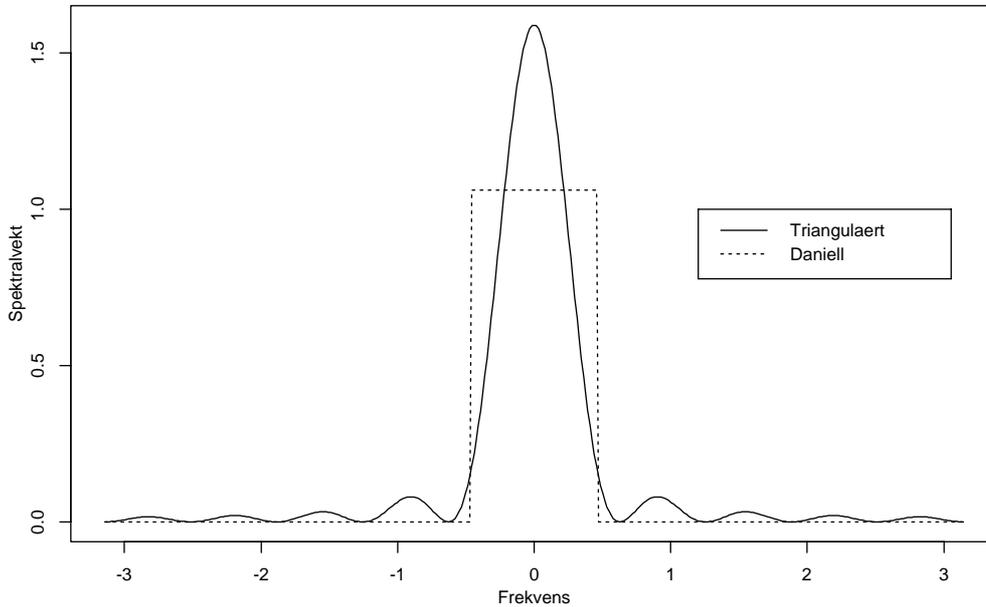
Eksempel 5.4: Daniell vindu

Med $w(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $-1 \leq x \leq 1$ får man $W(\omega) = \begin{cases} \frac{r}{2\pi} & |\omega| \leq \frac{\pi}{r} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ (rektangulært vindu i frekvens-planet).

Dette tilsvarer det glidende gjennomsnittet i eksempel 3.1 (Discrete Spectral Average Estimator) med $W_n(j) = (2m + 1)^{-1}$, $|j| \leq m = [\frac{n}{2r}]$. Asymptotisk varians blir $\text{Var}(\hat{f}_L(\omega)) \approx \frac{r}{n} f^2(\omega)$, $0 < \omega < \pi$ og litt større enn for Triangulært vindu. •

For å sammenligne de forskjellige "Lag vinduene" kan verdien av r i to spektralvinduer velges slik at den asymptotiske variansen blir lik, og så sammenligne formen på vinduene. For å sammenligne det

triangulære vinduet og Daniell vinduet velges $r_D = \frac{2r_T}{3}$ og så sammenlignes $W_T(\omega) = (2\pi r_T)^{-1} \frac{\sin^2(\frac{\pi\omega}{2})}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}$ og $W_D(\omega) = \frac{r_D}{2\pi}$, $|\omega| \leq \frac{\pi}{r_D}$, se figur nedenfor (med $r_T = 10$)



Figur23: Sammenligning av spektralvinduer

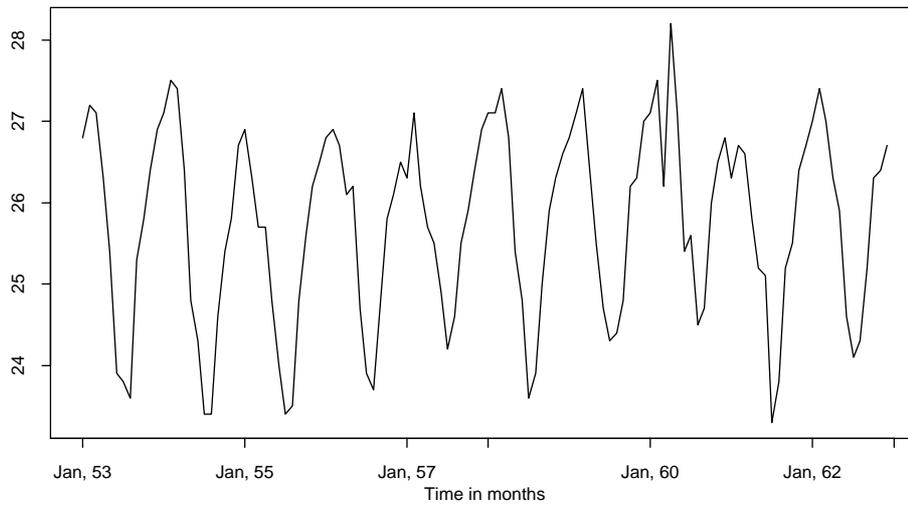
Figuren viser at massen i det triangulære spektralvinduet er spredt mer utover og har topper et stykke unna sentrum. Med spektralvinduets tilnærming til vektene i Discrete Spectral Average Estimator vil dette tilsvare et større intervall å midle periodogramverdiene over og kunne medføre større bias. Daniell vinduet kommer altså best ut av denne sammenligningen og dette har vi sett tilsvare det glidende gjennomsnittet (5.4 og 5.1).

Eksempel 5.5: Temperatur data

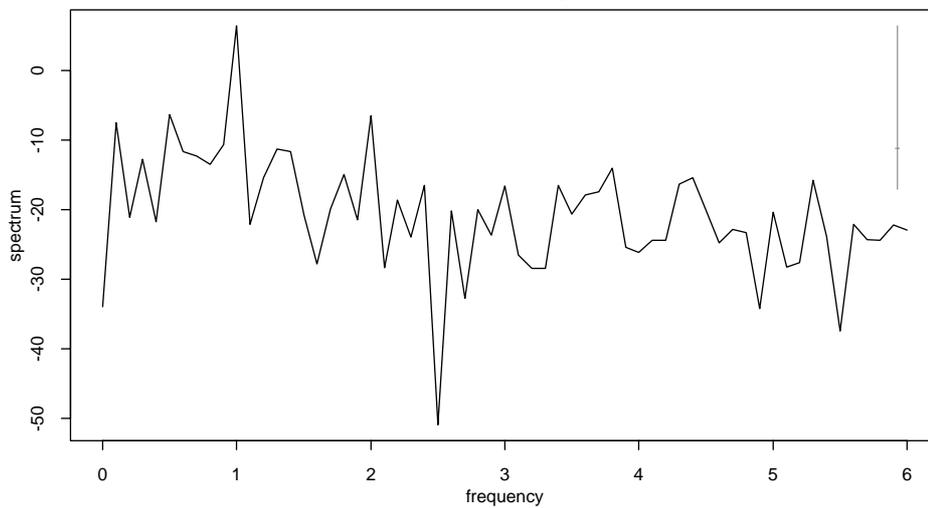
Her er spektralestimering utført på noen temperatur-data fra virkeligheten. Dermed er modellen ikke lenger rent deterministisk. Splus er benyttet. Nedenfor er rå-dataene og periodogrammet plottet. I Splus er frekvens-benevningen perioder pr. tidsenhet i stedet for radianer pr. tidsenhet. Dette får litt følger for akse-enhetene. Fourier-frekvensen er gitt ved $f_k = \frac{k}{\Delta n}$, $k = 0, \dots, \frac{n}{2}$, der Δ er intervallet mellom observasjonene. Temperatur-dataene er månedlige observasjoner i 10 år. Da er $n = 120$, $\Delta = \frac{1}{12}$ [år] og den største Fourier-frekvensen er 6 [perioder / år] som skal svare til den høyeste teoretiske frekvensen.

Figurene 24 og 25 viser dataene, periodogrammene og spektral-estimerer som er glattede periodogrammer. De har alle dB på y-aksen.

Temperatur data

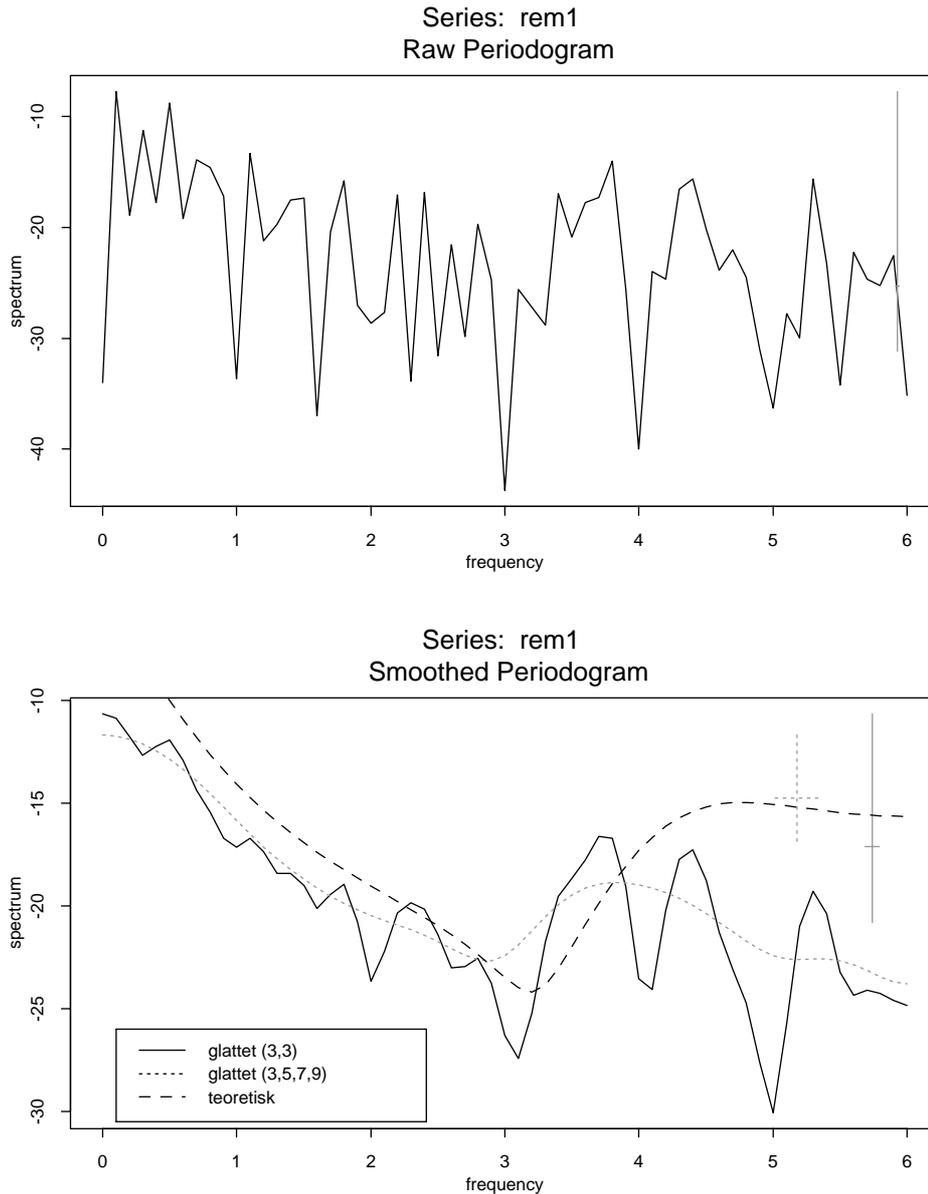


Series: temp
Raw Periodogram



Figur24: Temperatur data og periodogram

I figur 24 ser vi en topp i frekvensen 1 [periode / år], noe som også kan ses direkte fra dataene.



Figur25: Sesongjustert periodogram og glatting, samt ARMA(3,2) tilpassning

Øverst i figur 25 vises periodogrammet til sesongjusterte temperaturer, og som vi ser er det ingen topp i 1 lengre. Nederst i figur 20 vises forskjellige glattede versjoner av periodogrammet. Måten det er glattet på her er gjentatte glidende gjennomsnitt av forskjellig lengde (dette har vi sett tilsvarende Daniell vindu). I tillegg er den teoretiske spektraltettheten tatt med fra en modell-tilpassningen basert på informasjons-kriteriet AIC. ARMA(3,2) modellen er den som har lavest AIC og maximum-likelihood estimatene er gitt ved: $\hat{\phi}_1 = 0.17$, $\hat{\phi}_2 = 0.47$, $\hat{\phi}_3 = 0.53$, $\hat{\theta}_1 = 0.22$, $\hat{\theta}_2 = 0.75$ og $\hat{\sigma}^2 = 0.138$. Overenstemmelsen er best for lave frekvenser. For de høye frekvensene kommer den teoretiske utenfor 95 % konfidensintervallet som er markert med korsene i øvre høyre hjørnet. Konfidensintervallet er basert på en kji-kvadrat tilnærming og bredden på den horisontale streken kalles båndbredden som er et mål på grad av glatting. Spektralestimatet sier at det er mest lavfrekvente komponenter i temperaturdataene og minst av de frekvensene i midten og de høyeste.

6. Referanser

- [1]: "The analysis of time series": Chatfield, Chris
Chapman & Hall, 1996
- [2]: "Spectral analysis and time series": Priestley, M. B.
Academic Press, 1989
- [3]: "Time Series: Theory and Methods": Brockwell, Peter J., Davis, Richard A.
Second Edition, Springer-Verlag, 1991
- [4]: "Introduction to Time Series and Forecasting": Brockwell, Peter J., Davis, Richard A.
Springer-Verlag, 1996
- [5]: "Seasonal Adjustment with the X-11 Method", Ladiray, Dominique, Qeunneville, Benoit
Springer-Verlag, 2001
- [6]: "The advanced theory of statistics", Kendall, M., Stuart, A., Ord, J.K.,
Volume 3, Fourth edition
Charles Griffin & Company Limited, London & High Wycombe 1983
- [7]: "New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program", Findley,
David, Monsell, Brian, Bell, William, Otto, Mark and Chen, Bor-Chung
U.S. Bureau of the Census
- [8]: "Digital Signal Processing", Oppenheim, A. V. and Schafer, R., W.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [9]: "Innføring i tidsserier - sesongjustering og X-12-ARIMA", Pham, Dinh Quang
SSB-serien Notater: 2001/2

De sist utgitte publikasjonene i serien Notater

- 2001/26 H.C. Hougen: Undersøkelse om folat-kunnskap blant kvinner i fertil alder: Dokumentasjonsrapport. 17s.
- 2001/27 Ø. Kleven og O.F. Vaage: Medieundersøkelsen 1999: Dokumentasjonsrapport. 49s.
- 2001/28 J. Heldal og J. Fosen: Statistisk konfidensialitet i SSB: Et diskusjonsnotat. 41s.
- 2001/29 B.O. Lagerstrøm: Bruk av folkehøgskoler, 2000/2001. 77s.
- 2001/30 R. Nygaard Johnsen: Undersøking om foreldrebetaling i barnehagar, januar 2001. 40s.
- 2001/31 R. Choudhury: Brukerveiledning for AMEN. 100s.
- 2001/32 R. Choudhury: Datagrunnlaget for AMEN: Teknisk dokumentasjon. 20s.
- 2001/33 G. Dahl og J. Johansen: FD - Trygd: Dokumentasjonsrapport. Sysselsetting. 1992-1997. 98s.
- 2001/34 L. Vågane: Samordnet levekårsundersøkelse 2000 - tverrsnittundersøkelsen: Dokumentasjonsrapport. 82s.
- 2001/35 J. Holmøy: Årsrapport 2000: Kontaktutvalget for helse- og sosialstatistikk. 36s.
- 2001/36 B. Astad og A.L. Brathaug: Kommunenes utgifter til primærlegetjenesten 1999: Evaluering av fastlegeordningen - førd data om kommunenes utgifter. 54s.
- 2001/37 B. Rosnes: Kommunale gebyrer knyttet til bolig . Januar 2001. 29s.
- 2001/38 K.I. Bøe og S. Lien: FD - Trygd: Dokumentasjonsrapport. Attføringspenger. 1992-1999. 80s.
- 2001/39 P.E. Lilleås, og R. Nygaard Johnsen: Foreldrebetaling i kommunale og private barnehager i perioden 1992-2001. 23s.
- 2001/40 B.R. Joneid: KOSTRA GenRev 2000. Malverk for generelt revisjonssystem - KOSTRA-data. Del 1: Håndbok for bruk av malverket ved generering av applikasjoner. Del 2: Systemdokumentasjon av GenRev-malverket. 46s.
- 2001/41 T.M. Normann: Bostedets betydning. Dokumentasjonsrapport. 36.
- 2001/42 B.A. Holth og J.T. Prangerød: Lederskapsundersøkelsen 2000. Dokumentasjonsrapport. 245s.
- 2001/43 T. Fæhn, J.-A. Jørgensen, T. Åvitsland, W. Drzwi: Næringsfordelte skatteutgifter. Dokumentasjon av beregningsgrunnlaget i ERA-beregningene 1998. 47s.
- 2001/44 KOSTRA - VAR-rapport 2001. 34s.
- 2001/45 KOSTRA - Kulturminne, natur og nærmiljø. 38s.
- 2001/46 KOSTRA: Arbeidsgrupperapporter 2001 - hefte 1. 58s.
- 2001/47 KOSTRA: Arbeidsgrupperapporter 2001 - hefte 2. 46s.
- 2001/48 Rapport fra arbeidsgruppa for KOSTRA - Samferdsel. 27s.
- 2001/49 L. Vågane: Undersøkelse om fysisk aktivitet blant personer i alderen 55-75 år: Dokumentasjonsrapport. 22s.
- 2001/50 L-C. Zhang: Estimeringsmetode for familie-/husholdningsfordeling. 17s.
- 2001/51 K.I. Bøe og J. Lajord: FD - Trygd: Dokumentasjonsrapport. Statsansatte. 1992-1999. 28s.
- 2001/52 I. Sagelvmo og H. Sjølie: Beregning av næringene jordbruk og skogbruk i nasjonalregnskapet. 51s.
- 2001/53 L.Solheim: Kvartalsvis lønnsindeks - definisjon av parametere, beregning av estimer og overvåkning av kvaliteten. 24s.